Mathématiques et valeurs de la République

1 Introduction

Dans ce texte nous examinerons quelques aspects, plutôt épars, du traitement pédagogique des valeurs de la République dans le cadre de l'enseignement des mathématiques. Pour tenter d'organiser ce sujet nous regrouperons nos considérations suivant plusieurs ordres :

- historique et critique
- logique
- civique

Nous n'évoquerons pas les situations et les pratiques professionnelles du professeur de mathématiques qui n'ont pas de lien particulier avec sa discipline. Il va de soi par exemple qu'un professeur de mathématiques, s'il est professeur principal d'une de ses classes, peut jouer un rôle tout à fait éminent d'éducation civique et morale en coordination avec le CPE et les autres acteurs de la communauté éducative. De même, tout professeur peut s'engager dans une action pédagogique particulière (association, club, sortie scolaire, etc.) engagée par une instance de l'établissement (conseil pédagogique, conseil d'administration) ou inscrite dans le projet d'établissement, et qui peut être une occasion privilégiée de faire vivre la laïcité.

2 Approche historique et critique

2.1 Les mathématiques, science de la logique, du calcul et des formes

Afin de clarifier le propos nous commencerons par une esquisse de définition des mathématiques :

> *Science qui étudie par le moyen du raisonnement déductif les propriétés d'êtres abstraits (nombres, figures géométriques, fonctions, espaces, etc.) ainsi que les relations qui s'établissent entre eux[1].*

Les mathématiques n'ont donc, *a priori*, pas de rapport <u>direct</u> avec le monde naturel et pas davantage avec la société ; un lien évident existe toutefois entre les mathématiques et de nombreuses questions relatives au monde (matière et rayonnement, phénomènes naturels mais aussi phénomènes de société), mais c'est un lien d'application ou d'inspiration et qui tend à demeurer en périphérie des mathématiques tout en les stimulant.

La tension entre ces deux aspects (utilité sociale et abstraction) est fort ancienne, et elle est en rapport avec la place des mathématiques dans la cité.

> Ce que l'on m'a donc conté, c'est que, dans la région de Naucratis en Egypte, a vécu un des antiques dieux de ce pays-là, celui dont l'emblème consacré est cet oiseau qu'ils nommaient l'ibis, et que Theuth est le nom de ce dieu ; c'est lui, me disait-on, qui le premier inventa le nombre et le calcul, la géométrie et l'astronomie, sans parler du tric-trac et des dés, enfin précisément les lettres de l'écriture. (Platon, *Phædon*)
>
> C'est donc à bon droit que celui qui, le premier, trouva un art quelconque, dégagé des sensations communes, excita l'admiration des hommes; ce ne fut pas seulement en raison de l'utilité de ses découvertes, mais pour sa sagesse et sa supériorité sur les autres. Puis les arts nouveaux se multiplièrent, dirigés, les uns vers les nécessités de la vie, les autres vers son agrément; or toujours les inventeurs de ces derniers arts ont été considérés comme plus sages que les autres, et cela, parce que leurs sciences ne tendent pas à l'utilité. De là vient que tous ces différents arts étaient déjà constitués, quand on découvrit ces sciences qui ne s'appliquent ni au plaisir, ni aux nécessités, et elles prirent naissance dans les contrées où régnait le loisir. Aussi l'Egypte a-t-elle été le berceau des arts mathématiques, car on y laissait de grands loisirs à la classe sacerdotale. (Aristote, *Métaphysique*)

1 Larousse

Les mathématiques dans l'antiquité avaient ainsi un double rôle : pour une part, outil incontournable pour toutes transactions (de terrains, de produits de la terre ou de monnaie), partages, constructions ou déplacements lointains, et jouissant à ce titre de la faveur des dirigeants, et pour une autre part spéculation intellectuelle visant à l'abstraction et à une généralité croissante[2].

2.2 *Les mathématiques, science des mathématiciens*

Une autre manière de cerner notre sujet consiste à voir cette science comme l'occupation commune des savants (ou chercheurs) qu'on désigne comme mathématiciens. On se demandera donc, à travers quelques exemples, si ces esprits singuliers se sont intéressés, non seulement aux valeurs de la République mais aussi à la chose publique en général.

De fait, quelques mathématiciens participèrent de près à la Révolution (Laplace, Condorcet), puis à l'Empire, d'autres à la révolution de 1830 (Galois). Ceux-là étaient bien évidemment attachés à la République. Il y eut cependant d'autres mathématiciens, non moins brillants, qui s'approchèrent du pouvoir lors de la Restauration ; ce notamment fut le cas de Cauchy. Hors de France, certains grands mathématiciens participèrent de près aux mouvements d'émancipation des peuples et des idées de la fin du XVIII^{me} siècle et du début du XIX^{me} (ce fut le cas de Leibniz, Euler, et bien d'autres) mais d'autres furent beaucoup plus conservateurs, ainsi Gauss.

Au XX^{me} siècle, on peut de même dégager les noms d'Emile Borel (ministre de la Guerre puis de la Marine de la Troisième République) et Paul Painlevé (qui fut ministre de l'Instruction, puis de la Guerre, puis président du Conseil, et enfin président de la Chambre), qui participèrent pleinement à l'édification de la Troisième République. En contrepoint, ne manquons pas de signaler le cas de Laurent Schwarz qui se distingua par son opposition résolue à la guerre d'Algérie.

Il y a régulièrement eu, depuis l'Antiquité, des mathématicien-ne-s persécuté-e-s pour leurs idées, leur appartenance à un groupe, leur liberté de pensée, ou leur refus de toute sorte de tyrannie. On peut citer ainsi :

- les premières mathématiciennes : Hypatie d'Alexandrie, Sophie Germain, Emmy Noether, etc.
- de nombreux mathématiciens juifs persécutés par le régime nazi (Edmund Landau, Hermann Weyl, J. von Neumann, Rósza Péter, etc.)
- mais aussi l'Uruguyen J.L. Massera, persécuté par la dictature de son pays.

Pour être tout à fait honnêtes, nous devons aussi reconnaître que certains mathématiciens participèrent plus ou moins activement à des régimes persécuteurs, ainsi Bieberbach, Teichmüller et Brouwer qui soutinrent le régime nazi.

En fin de compte, si nous définissons les mathématiques comme l'activité des mathématiciens, il nous faut convenir que leur étude ne soutient pas plus les valeurs de la République qu'elle ne les combat, et qu'elle s'accommode fort bien de diverses religions tout en pouvant parfaitement s'en passer (mais n'est-ce pas là une vision possible de la laïcité ?).

Accessoirement, la découverte de certains des portraits de ces illustres savants a une valeur éducative que nous employons trop rarement.

2.3 *Un risque de rejet ?*

La dualité de significations des mathématiques se retrouve dans l'enseignement : la mission première de l'enseignant en mathématiques est en premier lieu de développer, chez les élèves, une compréhension des nombres, des figures géométriques et du calcul (numérique ou symbolique) qui en découle ; cet enjeu fondamental étant bien posé, intervient aussitôt la mise en valeur de l'applicabilité des mathématiques à travers les démarches de modélisation et de représentation des phénomènes (y compris aléatoires). Sans un bon développement des compétences sur les nombres, les figures et le calcul le développement des mathématiques se fragilise et perd son sens.

2 Les travaux de Diophante sont remarquables dans ce sens : il étudie des séries d'équations arithmétiques quasiment sans se soucier de l'origine pratique de tels problèmes.

C'est ainsi qu'insérer dans le cœur de la matière « mathématiques », au niveau scolaire, des questions qui lui sont étrangères pourrait provoquer incompréhension ou rejet, ou encore une mauvaise perception des enjeux de cette matière.[3]

Il convient donc, et nous nous en contenterons, de développer quelques modestes approches applicatives qui puissent sembler suffisamment naturelles aux professeurs comme aux élèves. Nous ne nous intéresserons finalement qu'à deux aspects essentiels des valeurs républicaines : l'État de droit et le Suffrage universel.

3 Approche logique

3.1 Pourquoi s'intéresser aux lois ?

L'État de droit peut se définir comme un système institutionnel dans lequel la puissance publique est soumise au droit (par opposition à la dictature qui ne s'en soucie point). Dans un tel système, les citoyens sont (au moins partiellement) protégés par une Constitution de l'arbitraire du pouvoir politique comme de celui du législateur. Les décisions rendues par la justice s'appuient donc sur un corpus de textes fondateurs et législatifs et nécessitent la mise au point de systèmes argumentatifs, plus ou moins issus du droit romain.

Les textes de loi sont très souvent formulés dans une langue codifiée et faisant un abondant usage des structures logiques (conditions, conséquences, conjonctions et disjonctions), ce qui peut les apparenter aux mathématiques. Sans pour autant s'engager dans une étude pouvant dépasser rapidement les possibilités des élèves, on peut se servir de certains textes de loi comme d'un matériau brut pouvant illustrer de manière intéressante l'initiation au raisonnement déductif et à la logique qui figure au programme de mathématiques de la classe de Seconde et du cycle terminal du lycée. C'est en ce sens que le travail sur la logique et le raisonnement peut contribuer à la concrétisation du principe (philosophique plus que constitutionnel) « nul n'est censé ignorer la loi ». On conviendra, accessoirement, que les élèves ont rarement l'occasion aux élèves d'être confrontés aux textes de loi, d'où l'utilité de la modeste mise en contact que nous proposons ici.

3.2 Logique et texte de loi

3.2.1 Méthodes inductive et déductive

Le raisonnement juridique se base en partie sur les procédés de la logique déductive mais ne s'y limite pas ; en effet, on distingue en droit la méthode déductive, qui part de propositions de base et en tire d'autres propositions en s'appuyant sur des règles d'inférence (les textes de loi), de la méthode inductive, laquelle part de phénomènes observés pour en induire par des hypothèses provisoires des principes, consolidés dans un second temps par les conséquences qu'on peut en tirer. De fait, les mathématiques emploient aussi des démarches inductives, essentiellement dans les phases de recherche.

3.2.2 Le syllogisme, base du raisonnement juridique

En France, la décision de justice se présente sous forme d'un ou de plusieurs syllogismes, sorte de raisonnement qui contient trois propositions dont la troisième (la conclusion) est la conséquence des deux autres, nommées prémisse majeure et prémisse mineure. La prémisse majeure a le caractère d'un principe général (règle issue d'un texte de loi, constatation de bon sens ou fait d'expérience), tandis que la prémisse mineure est une information relative au cas précis que l'on souhaite aborder[4].

L'exemple classique en cette matière est le suivant :

Tous les hommes sont mortels,	*prémisse majeure*
or Socrate est un homme,	*prémisse mineure*

3 Qu'il s'agisse des valeurs de la République ou du développement durable, cela n'y changerait rien.
4 En droit, la mineure consiste en l'énoncé de faits précis, constatés et juridiquement qualifiés.

donc Socrate est mortel .	*conclusion*

Un syllogisme bien construit, et basé sur des prémisses reconnues comme vraies, conduit à une conclusion aussi rigoureuse et indiscutable qu'un raisonnement mathématique dans lequel une conclusion est tirée de l'application d'un théorème. Schématiquement, le syllogisme juridique se décompose de la manière suivante :

Tout voleur étant punissable,	*majeure = règle de droit*
et X ayant volé quelque chose,	*mineure = faits*
alors X doit être puni.	*conclusion*

On ne cherchera évidemment pas à réduire le droit à une pure logique formelle, car cela ne serait pas compatible avec la finalité essentielle de tout système juridique qui est de régir la vie sociale ; en effet, une vision purement formelle du droit le rendrait figé alors que le réel (toujours complexe) oblige le droit à s'adapter et à évoluer.

Le syllogisme (ou inférence logique) occupe cependant une place majeure dans les raisonnements juridiques. Les décisions juridiques ne procèdent évidemment pas d'un seul syllogisme mais d'un enchaînement de syllogismes successifs.

3.2.3 Suites de syllogismes

Le raisonnement juridique peut amener une suite plusieurs syllogismes., dans lesquels certaines « mineures » sont constituées par la conclusion du syllogisme précédent qui devient une donnée de fait bien qu'ayant un support juridique[5].

Il arrive aussi que le juriste inverse le raisonnement et qu'il parte de la conclusion à laquelle il veut parvenir pour légitimer cette conclusion, il fait alors un raisonnement qui le conduit aux prémisses nécessaires : c'est un « syllogisme ascendant ». Cela se produit quand une avocat défend une thèse ou souhaite atteindre un résultat déterminé ; il recherche alors les éléments de fait et les règles de droit qui pourraient justifier cette thèse ou qui pourraient parvenir au résultat souhaité.

En pratique, l'enjeu n'est pas seulement la correction formelle des inférences et du raisonnement juridique, mais aussi le choix des prémisses adéquates, qui bien souvent n'ont pas la certitude des prémisses d'un raisonnement scientifique. On ignore souvent ce qui s'est réellement passé dans l'intégralité. La qualification de ces faits peut s'avérer hésitante, incertaine. Les règles de droit applicables, leur interprétation peuvent donner lieu à une hésitation soit parce qu'il n'y a pas de règle de droit visant précisément la situation en cause, soit parce que les faits peuvent se rattacher en même temps à des règles différentes (pouvant même se contredire!).

3.2.4 Quelques exemples d'articles de loi ou de codes

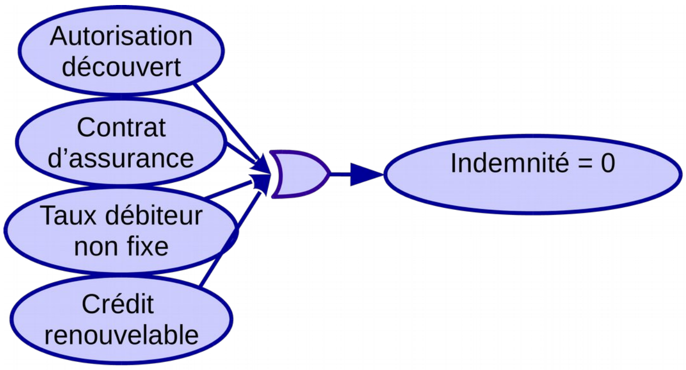
Voici quelques articles de lois ou de décrets mettant en jeu diverses articulations logiques (inférences, prémisses ou conclusions positives ou négatives, et conjonctions ou disjonctions[6]).

Article 312 (Code Civil) *L'enfant conçu ou né pendant le mariage a pour père le mari.*	Cet article nous présente une prémisse (ou majeure) sous forme disjonctive (le « ou »).
Article 313 (Code Civil) *La présomption de paternité est écartée lorsque l'acte de naissance de l'enfant ne désigne pas le mari en qualité de père.*	Exemple avec une prémisse et une conclusion sous forme de négations.
Elle est encore écartée, en cas de demande en divorce ou en séparation de corps, lorsque l'enfant est né plus de trois cents jours après la date soit de l'homologation de la convention réglant l'ensemble des conséquences du divorce ou des mesures provisoires prises en application de l'article 250-	Prémisse sous une forme logique plus complexe : (DIV ou SEP) et PLUS_DE_300

5 L'exemple initialement présenté lors du séminaire est à modifier, il ne figure donc pas ici.
6 Pour faciliter le repérage, on a ici surligné en vert les disjonctions, en rouge quelques négations et en jaune les conjonctions.

2, soit de l'ordonnance de non-conciliation, et moins de cent quatre-vingts jours depuis le rejet définitif de la demande ou la réconciliation.	et MOINS_DE_180
Article 314 (Code Civil) *Si elle a été écartée en application de l'article 313, la présomption de paternité se trouve rétablie de plein droit si l'enfant a la possession d'état à l'égard du mari et s'il n'a pas une filiation paternelle déjà établie à l'égard d'un tiers.*	La prémisse en forme de cascade de « conditionnelles » revient à une conjonction.
Article R312-2 (Code de la Consommation) *L'indemnité éventuellement due par l'emprunteur, prévue à l'article L. 312-21 en cas de remboursement par anticipation, ne peut excéder la valeur d'un semestre d'intérêt sur le capital remboursé au taux moyen du prêt, sans pouvoir dépasser 3 % du capital restant dû avant le remboursement.*	Ici c'est la conclusion qui se présente sous forme conjonctive.
Article L311-22 (Code de la Consommation) *L'emprunteur peut toujours, à son initiative, rembourser par anticipation, en partie ou en totalité, le crédit qui lui a été consenti. (...)* *Aucune indemnité de remboursement anticipé ne peut être réclamée à l'emprunteur dans les cas suivants :* *1° En cas d'autorisation de découvert ;* *2° Si le remboursement anticipé a été effectué en exécution d'un contrat d'assurance destiné à garantir le remboursement du crédit ;* *3° Si le remboursement anticipé intervient dans une période où le taux débiteur n'est pas fixe ;* *4° Si le crédit est un crédit renouvelable au sens de l'article L. 311-16.*	Ici l'hypothèse est présentée sous forme disjonctive.

Les articulations logiques peuvent être présentées sous forme graphique, aidant certains élèves à mieux saisir la démarche globale du texte de loi. Dans le cas ci-dessus, on peut recourir au symbole du connecteur logique « ou » :

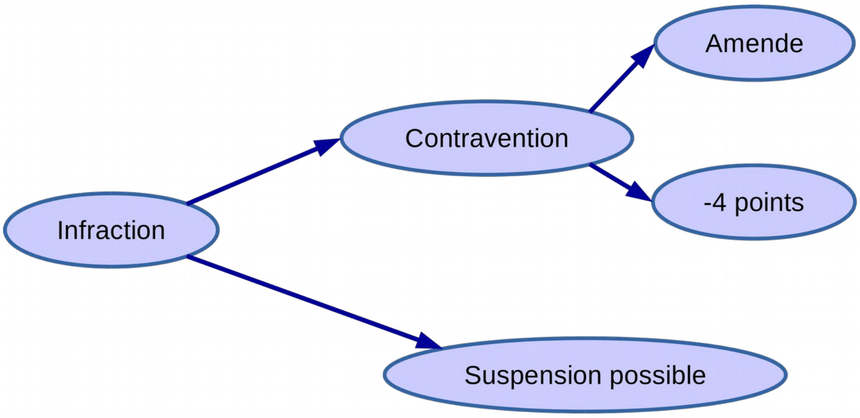


Les conclusions peuvent aussi prendre une forme logique complexe. Par exemple :

Article R415-5 (Code de la Route) *Lorsque deux conducteurs abordent une intersection par des routes différentes, le conducteur venant par la gauche est tenu de céder le passage à l'autre conducteur, sauf dispositions différentes (...)* *Le fait, pour tout conducteur, de ne pas respecter les règles de priorité fixées au présent article est puni de l'amende prévue pour les contraventions de la quatrième classe.* *Tout conducteur coupable de cette infraction encourt également la peine complémentaire de suspension, pour une durée de trois ans au plus, du permis de conduire, cette suspension pouvant être limitée à la conduite*	Définition de l'obligation dont le non-respect constitue une infraction (I). Si (I) alors contravention (C). Si (C) alors amende (A). Si (I) alors (S).

en dehors de l'activité professionnelle. *Cette contravention donne lieu de plein droit à la réduction de quatre points du permis de conduire.*	Si (C) alors (P4).

Le schéma logique de la conclusion est ici arborescent :



En fin de compte, on conçoit ainsi qu'une (petite) partie des compétences requises pour étudier le droit s'apparentent aux compétences mathématiques, bien qu'aucun lien formel n'existe au niveau des études de droit.

L'exemple tiré du Code de la Route nous amène très naturellement, en transition, de l'espace juridique à l'espace civique.

4 Approche civique

Nous examinerons dans cette partie comment, de diverses manières, l'étude et la pratique des mathématiques peut contribuer au bon fonctionnement du suffrage universel. Pour être à même de voter, le citoyen doit pouvoir s'informer, vérifier les assertions contenues dans les programmes des candidats, se faisant une opinion à partir de faits et les distinguant des croyances ou jugements pré-établis.

4.1 Se préparer au vote

4.1.1 Mesurer l'écart entre croyances, préjugés et faits établis

Sur cette thématique de la pensée rationnelle les mathématiques ne se distinguent guère d'autres sciences, s'agissant de confronter des idées, conjecturer, argumenter et démontrer pour valider ou réfuter une affirmation. Comme on a pu le voir dans le cas du droit, mais de manière plus générale, la pensée logique participe à l'établissement des liens entre causes et conséquences.

Tout cela est d'ailleurs dans le « nouveau » socle, fraîchement publié :

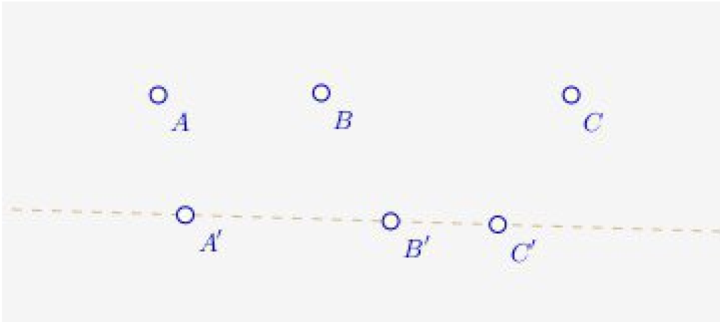
> *La démarche scientifique a pour objectif d'expliquer l'Univers, d'en comprendre les évolutions, selon une approche rationnelle distinguant faits et hypothèses vérifiables d'une part, opinions et croyances d'autre part. Fondée sur l'observation, la manipulation, l'expérimentation, elle développe chez l'élève sa rigueur intellectuelle, son habileté manuelle et son esprit critique, son aptitude à démontrer, à argumenter.*

En la matière, les mathématiques permettent aisément de distinguer un résultat de portée générale d'un cas particulier éventuellement observé sur une figure ou de petits nombres (il suffit d'exhiber un contre-exemple), et elles permettent de dégager des faits statistiques à partir de phénomènes aléatoires tirés de la vie courante. En somme, les mathématiques[7] peuvent aider à faire comprendre qu'il ne suffit pas de dire quelque chose pour que ce soit vrai !

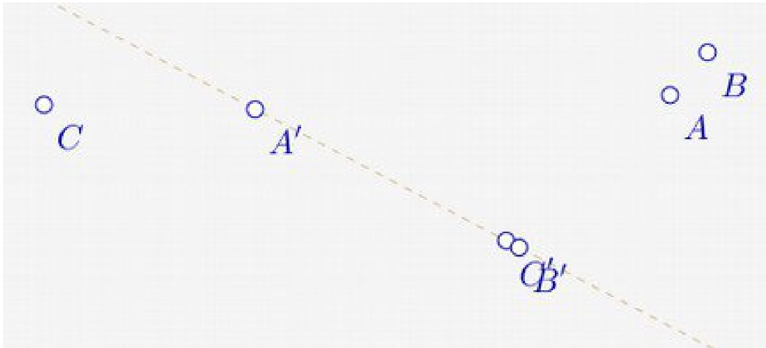
Un très simple exemple peut être donné dans le contexte de l'utilisation d'un logiciel de géométrie dy-

7 Sans prétendre à une quelconque exclusivité en ce domaine, il va de soi.

namique. On propose à un élève de placer trois points alignés A, B, C à l'aide du logiciel. L'élève Claude place les points A, B, C sur l'écran et l'élève Dominique place A', B', C' :



Ces points semblent (respectivement) alignés.



Pour en décider, on peut recourir à une fonctionnalité du logiciel qui consiste à « secouer » la figure (tout en respectant les protocoles de construction). On s'aperçoit ainsi que Claude a « placé » les points avec soin mais sans se servir de la contrainte d'alignement alors que Dominique a créé le troisième point sur la droite définie par les deux précédents. C'est ainsi que l'apparence (un positionnement visuel) peut être confrontée à l'essence (l'alignement).

4.1.2 Lire et interpréter des données chiffrées

L'univers politique actuel fait la part belle aux informations numériques et en particulier aux pourcentages. La maîtrise des calculs sur des nombres exprimés sous la forme de pourcentages est désormais nécessaire au citoyen qui souhaite pour juger par lui-même du bien-fondé des déclarations des candidats à une élection. La journaliste Maryline Baumard décrivait, à ce propos (dans le journal Le Monde Magazine du 30 mars 2013), dans un article intitulé « Les maths, nouvelle langue morte ? », les difficultés de plusieurs femmes et hommes politiques face aux multiplications et pourcentages (dont deux anciens ministres qui confondent apparemment addition et multiplication)[8].

4.1.3 Lire et interpréter des statistiques

Face à l'inflation de statistiques de tous ordres, aux graphismes plus ou moins trompeurs qui fleurissent dans les medias, il y a un réel travail éducatif à accomplir pour que les élèves (futurs électeurs) sachent interpréter les données qu'on leur délivre et distinguer l'information de la manipulation par le moyen des chiffres. Cela suppose par exemple de connaître (et de distinguer !) moyenne et médiane, par exemple quand il est question de salaires, de revenus etc. Ou encore, de comprendre les écarts statistiques (la fluctuation d'échantillonnage[9]) et ainsi de pouvoir saisir quel est le genre d'information que les sondages peuvent fournir, ou non ; c'est ainsi qu'un sondage donnant un candidat vainqueur avec 51 % des voix contre son opposant qui en récolterait donc 49 % n'est plus du tout prédictif[10]. C'est

8 Voir aussi ces activités proposées par l'académie de Nantes :
http://www.pedagogie.ac-nantes.fr/mathematiques/enseignement/groupe-de-recherche/actions-nationales-2013-2015/video-soldes-et-impots-795769.kjsp?RH=1160078262078
http://www.francetvinfo.fr/tarifs-de-l-electricite-une-hausse-historique-a-prevoir_256059.html
http://www.math93.com/index.php/humour-et-maths/543-jt-de-13h-de-france-2-une-erreur-de-mathematiques-en-direct
9 Programmes des classes de Seconde, repris et complété en classe Terminale.
10 On considère généralement que les sondages pratiqués sur des échantillon de 1000 personnes (environ) donnent un résultat avec une marge d'erreur de 3 % pour un risque de 5 % ; c'est-à-dire, le candidat donné à

évidemment ce qui s'est passé lors de l'élection présidentielle de 2002.

Ce doute pèse également sur le vote comme nous allons le voir.

4.2 Voter, en dépit des paradoxes

4.2.1 Les mathématiques du choix social

Les mathématiques peuvent s'intéresser à de nombreux aspects de la vie sociale, et les processus de vote et d'élection font partie de ce lot. Chacun sait que diverses méthodes sont employées dans les différents pays pour élire ou choisir les représentants (maires, conseillers, députés, etc.), et a pu constater que ces méthodes ne conduisant pas forcément au même résultat. On peut alors se demander si un système plus « juste » pourrait être mis au point ; cette quête est en réalité fort ancienne car elle semble remonter à Pline le Jeune (qui mentionne dans ses lettres l'innovation du suffrage à bulletins secrets) et Raymón Lull (savant et théologien catalan, XIII^{me} siècle) qui, confronté à un problème d'élection d'un abbé ou d'une abbesse au sein d'un monastère propose des systèmes de vote basé sur l'étude des préférences par couples.

Ces mathématiques sont tout à fait élémentaires (pourcentages) et se prêtent tout à fait au travail réalisé aux cycles 3 et 4 sur le calcul et les pourcentages.

4.2.2 Nicolas de Condorcet

Condorcet reprend (en 1785), sans le savoir, les approches de Raymón Lull et énonce ce qui est devenu le « paradoxe de Condorcet » que nous allons présenter.

Considérons par exemple un groupe de 50 votants ayant le choix entre trois propositions A, B et C. Les préférences se répartissent ainsi (en notant A > B, le fait que A est préféré à B) :

20	votants préfèrent	A > B > C
0	votant préfère	A > C > B
12	votants préfèrent	B > C > A
2	votants préfèrent	B > A > C
8	votants préfèrent	C > A > B
8	votants préfèrent	C > B > A

Avec des élections « classiques », on obtient déjà des résultats contrastés :

- Si on fait un vote à un tour, c'est A qui est choisie (avec 20 voix contre 16 pour C et 14 pour B).
- Si on fait un vote à deux tours, avec abstentions, au premier tour c'est B qui est éliminé et au second tour 22 électeurs préfèrent A sur C tandis que 28 préfèrent C sur A, donc C est choisie.
- Si on fait un vote à deux tours avec désistement, et que B « donne » ses voix à A, c'est A qui est choisie.

Selon Condorcet, on pourrait s'en remettre à un schéma de « duels », confrontant les propositions deux à deux et retenant la proposition qui gagne le plus grand nombre de ces « duels ». Ici, le plus grand nombre de votants (soit 20) préfère A à B, et B à C. Toutefois, parmi les votants qui restent on en trouve 28 qui préfèrent C à A ! Condorcet propose de résoudre ce paradoxe en choisissant la proposition qui réalise en plus grand <u>écart de votes</u>. Dans notre exemple :

- 28 préfèrent A > B contre 22 pour B > A, écart de 6
- 34 préfèrent B > C contre 16 pour C > B, écart de 18
- 28 préfèrent C > A contre 22 pour A > C, écart de 6

La proposition B est alors retenue selon cette approche !

---

51 % peut en fait avoir entre 48 % et 54 % des voix, avec un risque d'erreur sur ce dernier résultat de l'ordre de 5 %.

4.2.3 Et le prix Nobel d'économie en 1972

Kenneth Arrow a établi en 1951 le théorème suivant, qui avec l'ensemble de son œuvre sur la théorie du choix social lui a valu le prix Nobel.

- On considère une série d'alternatives pour un certain choix de société, proposé à N individus.
- Chaque individu est supposé capable de classer les alternatives en ordre de préférence (avec des ex-aequo permis)
- Et la société choisit un règle de vote permettant de prendre une décision (c'est-à-dire un classement des alternatives) à partir des préférences des individus.
- Quelques « règles du jeu » sont ajoutées :
  - règle de transitivité : si un individu préfère A à B et B à C alors il (ou elle) préfère A à C.
  - règle d'unanimité ou principe de Pareto : si l'alternative A est jugée meilleure que l'alternative B par tous les individus, c'est A qui est finalement choisie par la société de préférence à B.
  - règle d'indépendance face aux changements d'avis : si on refait le vote et que deux alternatives (disons C et D) sont classées pareillement par tout le monde sur les deux votations, alors C et D sont classées de la même manière dans les deux décisions finales.
- et une définition : l'individu Z est un « dictateur »[11] si le résultat final coïncide avec le choix de Z indépendamment des votes des autres individus.
- Le théorème d'Arrow s'énonce alors ainsi : dans une société régie par les règles de transitivité, d'unanimité et d'indépendance, il y a un dictateur.

De nombreuses recherches sur ces questions ont abondamment montré que tout système de vote, quelles qu'en soient les modalités, peut produire des paradoxes soit dans le résultat soit lors du dépouillement. Tout cela peut être expérimenté par les élèves, par exemple à l'occasion de l'élection des délégués !

5 Et la laïcité dans tout cela ?

5.1 Mathématiques et laïcité sont des questions sans grand rapport

Nous entendrons ici par « laïcité » une certain nombre de droits et libertés garanties par la Constitution et les autres textes de même valeur[12] : liberté de conscience, égalité face de tous face à la loi sans distinction d'origine ou de religion, droit d'opinion et de manifestation de ces opinions, protection de la liberté d'expression.

Les mathématiques n'ont que peu à voir avec les lois qui tentent de définir la laïcité et d'en circonscrire le domaine, qu'il s'agisse de territoires, de pratiques sociales ou d'argumentations juridiques, et les débats qui nous agitent à ce sujet ne troublent guère les cercles où les mathématiciens soupèsent des propositions n'ayant de rapport ni avec la divinité ni avec son absence.

Pour étayer cette considération, il suffit de nous reporter, à nouveau, vers les profils de quelques mathématiciens du passé. On rassemblera sans la moindre peine quelques noms de mathématiciens considérés comme sceptiques voire athées : Omar Khayam, d'Alembert, Pierre-Simon Laplace, François Arago, Bertrand Russel, G.H. Hardy (grand ami de S. Ramanujan qui, lui était profondément religieux), Jacques Hadamard, Alan Turing, Claude Shannon, Laurent Schwarz, John H. Conway etc.

D'un autre côté, on peut repérer certains savants qui contribuèrent de manière notable aux progrès des mathématiques et n'en étaient pas moins animés de soucis ou de sentiments liés à la religion : Al Khuwarismi , Al Kashi, Maïmonide, Nicolas de Cues, Raymond Lull, Blaise Pascal, Mersenne, Bayes, Augustin Cauchy, Georg Cantor, Dedekind etc.

11 Ou « faiseur d'opinion » …

12 Préambule de la constitution de 1946, déclaration des droits de l'homme de 1789, convention européenne des droits de l'homme, etc.

5.2 Et pour ne pas conclure

Relisons Dom Juan, acte III, scène 1 (le dialogue de Dom Juan et de Sganarelle).

Sganarelle : Et dites-moi un peu (…) : qu’est ce que vous croyez?

Dom Juan : Ce que je crois?

Sganarelle : Oui.

Dom Juan : Je crois que deux et deux sont quatre, Sganarelle, et que quatre et quatre sont huit.

Sganarelle : La belle croyance que voilà ! Votre religion, à ce que je vois, est donc l’arithmétique ? Il faut avouer qu’il se met d’étranges folies dans la tête des hommes, et que, pour avoir bien étudié, on en est bien moins sage le plus souvent. Pour moi, Monsieur, je n'ai point étudié comme vous, Dieu merci, et personne ne saurait se vanter de m'avoir jamais rien appris ; mais, avec mon petit sens, mon petit jugement, je vois les choses mieux que tous les livres, et je comprends fort bien que ce monde que nous voyons n'est pas un champignon qui soit venu tout seul en une nuit. Je voudrais bien vous demander qui a fait ces arbres-là, ces rochers, cette terre, et ce ciel que voilà là-haut, et si tout cela s'est bâti de lui-même. Vous voilà, vous, par exemple, vous êtes là: est-ce que vous vous êtes fait tout seul, et n'a-t-il pas fallu que votre père ait engrossé votre mère pour vous faire ? Pouvez-vous voir toutes les inventions dont la machine de l'homme est composée sans admirer de quelle façon cela est agencé l'un dans l'autre ? Ces nerfs, ces os, ces veines, ces artères, ces… ce poumon, ce cœur, ce foie, et tous ces autres ingrédients qui sont là et qui. Oh! dame, interrompez-moi donc, si vous voulez. Je ne saurais disputer, si l'on ne m'interrompt. Vous vous taisez exprès, et me laissez parler par belle malice.

Dom Juan : J’attends que ton raisonnement soit fini.