Extrait du Les nouvelles technologies pour l'enseignement des mathématiques

http://revue.sesamath.net/spip.php?article120

Introduire les racines carrées à partir de la géométrie

- N° 8 - Janvier 2008 -

Date de mise en ligne : dimanche 3 février 2008

Autres articles de Françine Dubreucq dans MathémaTICE.

Ces nouveaux nombres que l'on rencontre au collège et que l'on utilise en 3ème sont difficiles à s'approprier. Partant de ce constat, j'ai construit une introduction des racines carrées du point de vue géométrique et j'utilise un logiciel de géométrie dynamique pour mettre en oeuvre cet aspect. Chaque fois que les élèves rencontrent une difficulté, nous revenons à la construction géométrique. Les figures sont réalisées avec TracEnPoche et les scripts Tep sont dans l'annexe, en fin d'article.

I. **Racines carrées entières :**

Objectifs :
Réinvestir la propriété de Pythagore
Utiliser la notation racine carrée $\sqrt{.}$ *.*

Exercice 1 :

1. Tracer un triangle STR rectangle en R tel que $RT = 3 cm$ et $RS = 4 cm$.
2. Calculer ST

Exercice 2 :

1. Tracer un triangle XYZ rectangle en X tel que $XY= 5 cm$ et $YZ= 13 cm$.
2. Calculer XZ.

Conclusion :

Les élèves vont chercher les nombres dont la racine carrée est un nombre entier $\sqrt{25}, \sqrt{144}$...
$\sqrt{25}$=5
$\sqrt{16}$=
$\sqrt{144}$=

Il nous reste donc à étudier les nombres $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{45}$, $\sqrt{2,5}$...

II. **Mettre en place l'égalité $\sqrt{5}+\sqrt{5}=2\sqrt{5}$** :

Objectifs :

Les élèves sont persuadés que $ \sqrt{5}$ + $ \sqrt{5}$ = $ \sqrt{10}$ *. Il faut essayer de les conduire à analyser ces quantités comme des longueurs,mais les convaincre qu'elles ne s'additionnent pas comme $5+5=10$.*

Exercice 3 :

1. Construire un triangle ABC rectangle en A tel que AB=1 cm et AC=2 cm.
2. Calculer BC.
   Conclusion : le segment [BC] mesure $ \sqrt{5}$cm.
   Il me semble important à ce niveau de faire comprendre que $ \sqrt{5}$ est la longueur du segment [BC] et que l'on va travailler avec des valeurs exactes. En quatrième, il était demandé d'en déduire une valeur approchée.
3. Placer E le symétrique de B par rapport à C.
4. Comment écrire BE ?

Toutes les réponses proposées par les élèves sont les bienvenues,$ \sqrt{5}^2$, $\sqrt{5}+\sqrt{5}$, $\sqrt{5}\times2$, $2\times\sqrt{5}$et bien sûr $ \sqrt{10}$, égalités à laisser en suspens.

Exercice 4 :

Objectif :

Vérifier que $ \sqrt{5}+\sqrt{5}$ n'est pas égal à $ \sqrt{10}$

1. Construire un triangle PQR rectangle en P tel que PQ=1 cm et PR=3 cm.
2. Calculer QR.
3. Comparer QR et BE.

Sur le dessin, ces deux longueurs sont différentes. On peut se contenter de ce constat à ce niveau et essayer de le justifier plus tard. On peut vérifier l'ordre de grandeur sur le logiciel de géométrie...

Conclusion :

$2\sqrt{5}$n'est pas égal à $ \sqrt{10}$, mais $2\sqrt{5}$ c'est la longueur d'un segment, c'est le double de la longueur d'un segment qui mesure $ \sqrt{5}$ cm et,$ \sqrt{5}+\sqrt{5}$,$ \sqrt{5}\times 2$, $2\times\sqrt{5}$ sont des écritures du même nombre $2\sqrt{5}$.

Exercice 5 :

1. Sur la figure précédente, placer F le symétrique de C par rapport à E.
2. Calculer BF.

$BF=2\sqrt{5}+ \sqrt{5}=3\sqrt{5}=\sqrt{5}+\sqrt{5}+\sqrt{5}=\sqrt{5}\times3=3\times \sqrt{5}$

A ce niveau, il est important de jongler avec toutes ces écritures : les élèves rencontreront ces différentes écritures dans les calculs et doivent se familiariser avec ces notations.

Exercice 6 : Réduire

Objectifs :

Généraliser ce résultat à des situations d'additions d'autres racines carrées et à des soustractions. On peut se ramener à des situations géométriques chaque fois que c'est nécessaire .

$ \sqrt{7}+\sqrt{7}=$

Il s'agit de trouver la longueur d'un segment

$3\sqrt{7}+2\sqrt{7}=$

$8\sqrt{7}-5\sqrt{7}=$

Là encore, on peut envisager la longueur d'un segment.

On propose aux élèves de généraliser cette situation :

$9\sqrt{7}-10\sqrt{7}=$

Et là, évidemment l'aspect géométrique ne peut être considéré...Il faudra y revenir plus tard avec une explication plus mathématique.

III. **Vérifier que $\sqrt{5}^2=5$:**

Objectifs :

Jusque-là, on peut considérer une racine carrée comme une longueur dans un triangle rectangle. On va maintenant considérer le carré d 'une racine carrée comme l'aire d'un carré et en déduire un certain nombre de résultats.

Exercice 7 :

1. Sur la figure de l'exercice 3, construire le carré BCGH de côté [BC].
2. Calculer l'aire du carré BCGH.

On ne connaît pas beaucoup de relations, il faut veiller à n'utiliser que ce que l'on sait. Sinon, les élèves ont l'impression que l'on invente et que eux n'ont pas le droit de le faire.

Aire du carré $BCGH=BC\times BC=BC^2= \sqrt{5}\times \sqrt{5}=\sqrt{5}^2$

Il faut revenir à ce qui a été fait dans l'exercice 1 et à la relation $BC^2=5$ pour conclure.

L'aire du carré BCGH est de $5 cm^2$.

Exercice 8 :

1. Sur la figure de l'exercice 4, construire le carré QRST de côté [QR].
2. Calculer l'aire du carré QRST.

On peut à ce niveau résumer la situation et généraliser à d'autres nombres :

- $ \sqrt{5}^2=$
- $ \sqrt{10}^2=$
- $ \sqrt{7}^2=$

IV. **Calculer $(3\sqrt{5})^2$:**

Objectif :

Savoir calculer $(3\sqrt{5})^2$ en l'interprétant comme l'aire d'un carré .

Exercice 9 :

1. Sur la figure de l'exercice 3, construire le carré BFMP de côté [BF].
2. Calculer l'aire du carré BFMP.

Les élèves ont beaucoup d'idées : 15, $9\sqrt{5}$, $6\sqrt{5}$...Il est assez rare que 45 soit proposé. Toutes ces réponses correspondent à des calculs qu'ils ont déjà vus et qu'ils essaient d'appliquer.

Aire du carré BFMP = $(3\sqrt{5})^2=3\sqrt{5}\times 3\sqrt{5}$

Il y a 9 petits carrés d'aire $5 cm^2$.

L'aire est donc égale à $9\times 5=45 cm^2$

Après, on peut proposer le calcul :

$(3\sqrt{5})^2=3\sqrt{5}\times 3\sqrt{5} =3\times 3\times\sqrt{5}\times\sqrt{5} =3^2\times\sqrt{5}^2=9\times 5=45$.

V. **Calculer $(\sqrt{10}+1)^2$:**

Objectifs :

Réinvestir les égalités remarquables en deux temps, d'abord en reprenant l'aire du carré comme la somme de l'aire de deux carrés et de deux rectangles puis en utilisant l'égalité déjà connue et en appliquant les résultats sur les racines carrées.

Exercice 10 :

1. Sur la figure de l'exercice 4, construire un point U sur [QR) en dehors de [QR] tel que $RU= 1 cm$.
2. Construire le carré QUVW de côté [QU].
3. Calculer l'aire du carré QUVW.
   Aire du carré QUVW=aire du carré de côté $ \sqrt{10}$+aire du rectangle de longueur $ \sqrt{10}$ et de largeur 1+aire du rectangle de longueur $ \sqrt{10}$ et de largeur 1+aire du carré de côté 1

   Aire du carré $QUVW= \sqrt{10}^2+\sqrt{10}\times 1+ \sqrt{10}\times1+1^2$

   Aire du carré $QUVW=10+ \sqrt{10}+1 \sqrt{10}$

   Aire du carré $QUVW=10+1+ \sqrt{10}+ \sqrt{10}$

   Aire du carré $QUVW=11+2\sqrt{10}$

   L'aire du carré QUVW est égale à $11+2\sqrt{10} cm^2$
4. En utilisant l'égalité remarquable $(a+b)^2=a^2+2\times a\times b+b^2$,calculer $(\sqrt{10}+1)^2$

   $ (\sqrt{10}+1)^2 =\sqrt{10}^2+2\times\sqrt{10}\times 1+1^2=10+2\sqrt{10}+1=10+1+2 \sqrt{10}=11+2 \sqrt{10}$

On peut généraliser ce type de calculs en revenant à l'interprétation géométrique chaque fois que cela s'avère nécessaire.

Exercice 11 :
Développer et réduire les expressions suivantes :

$A=(5\sqrt{2}-6)^2$

$B=(3\sqrt{6}+5)(3\sqrt{6}-5)$

VI. **Comparer $ \sqrt{{9} \times {5}}$ et $ \sqrt{9}\times \sqrt{5}$:**

Objectifs :

Comparer des nombres en comparant leurs carrés. Ici, nous comparons des aires, donc si les aires des carrés sont égales, cela implique que les côtés des carrés sont de même longueur, car ce sont des nombres positifs. Ce cas particulier prépare à la démonstration de la propriété $\sqrt{a}\times \sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$ *a et b étant des nombres positifs.*

Exercice 12 :

1. Tracer un triangle IJK rectangle en J tel que $JK= 6 cm$ et $IJ= 3 cm$.
2. Calculer IK.

On trouve $IK= \sqrt{45}=\sqrt{{9} \times {5}}$

3. Calculer l'aire du carré de côté [IK].
4. En reprenant le carré BFMP, écrire la longueur du côté sous la forme .... $ \sqrt{9}\times \sqrt{5}$ puis comparer l'aire des deux carrés.

aire du carré $BFMP=(3 \sqrt{5})^2=(\sqrt{9} \times \sqrt{5})^2= \sqrt{9}^2\times\sqrt{5}^2=9\times5=45$

aire du carré de côté [IK]= $ \sqrt{{9} \times {5}}^2= \sqrt{45}^2=45$

Donc aire du carré BFMP=aire du carré de côté [IK]=45

Donc IK= $ \sqrt{45}=\sqrt{{9} \times {5}}=BF= 3 \sqrt{5}= \sqrt{9}\times\sqrt{5}$

A ce niveau, il faudrait démontrer que $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$, *a* et *b* étant des nombres positifs.

Exercice 13 :

Objectifs :

On avait remarqué que $2\sqrt{5}$ et $ \sqrt{10}$ étaient deux nombres différents sur le dessin mais nous ne l'avions pas établi de manière précise.

Démontrer que $2\sqrt{5}$ et $ \sqrt{10}$ sont différents :

Pour cela, nous allons comparer $(2\sqrt{5})^2$ et $ \sqrt{10}^2$.

1. Construire le carré de côté $2\sqrt{5}$.
2. Calculer l'aire de ce carré.
3. Construire le carré de côté $ \sqrt{10}$.
4. Calculer l'aire de ce carré.
5. Conclure

Exercice 14 :

Objectifs :

mettre sous la forme a $ \sqrt{b}$ *les nombres suivants sans utiliser l'aspect géométrique.*

Calculer $ \sqrt{45}$, $ \sqrt{20}$

Exercice 15 : En utilisant les résultats de l'exercice 14, calculer $ \sqrt{45}+\sqrt{20}$.

Objectifs :

A partir de là, comment calculer $ \sqrt{45}+\sqrt{20}$ *.*

Les élèves n'ont pas oublié le début et ne calculent pas $ \sqrt{65}$ *.*

Exercice 16 :

Objectifs :

il s'agit de donner du sens à $4\sqrt{18}+\sqrt{50}$

Calculer $4\sqrt{18}+\sqrt{50}$

${\sqrt{18}}={\sqrt{9 \times 2}}={\sqrt{9}\times\sqrt{2}}={{3}\times \sqrt{2}}={{3}\sqrt{2}}$

${4\sqrt{18}}={4\times \sqrt{18}}={4\times{3}\sqrt{2}}={12\sqrt{2}}$

${4\sqrt{18}+\sqrt{50}}={12\sqrt{2}+5\sqrt{2}}={17\sqrt{2}}$

En cas de difficulté, on peut revenir à un triangle rectangle et isocèle dont le côté mesure $3 cm$ et à un autre triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent $1 cm$ et $7 cm$.

VII. **Racine carrée et fraction :**

Exercice 17 :

Objectifs :

$\frac{\sqrt{5}}{2}$ n'est pas égal à $ \sqrt{2,5}$.

1. Tracer un triangle ABC rectangle en A tel que $AB= 1 cm$ et $AC= 2 cm$.
2. Placer O le milieu de [BC].
3. Calculer AO.

$AO={BC}\div 2 = \frac{1}{2}BC = \sqrt{5} \div 2 = \frac{1}{2} \sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}} {2}$

Les élèves proposent des réponses et donneront $ \sqrt{2,5}$.

Différentes possibilités d'après ce que l'on a fait pour conclure :

comparer des valeurs approchées

comparer les carrés des nombres

Proposer une approche géométrique des racines carrées permet de visualiser chaque situation qui pose problème aux élèves. Il reste inévitablement un travail de fond à faire par exemple sur la factorisation : $3\sqrt{5}-9\sqrt{5}$ ne peut-être traité correctement qu'en utilisant des outils mathématiques. Ou encore, lorsque l'on demande de calculer une expression littérale pour une valeur donnée de *x*, par exemple pour $x= \sqrt{5}$, il n'est pas possible de garder l'idée qu'une racine carrée n'est qu'une longueur.

Une maîtrise des calculs avec des radicaux demande une certaine distance par rapport à une approche géométrique, lorsque les élèves rencontreront le nombre d'or ¦ et vérifieront que $\phi^2 =\phi+1$, il est indispensable qu'ils aient compris les racines carrées comme des nombres réels et pas seulement comme des longueurs.

