

 SFODEM	<i>Le problème des traces de bicyclette</i> Sommaire	
--	---	---

Fiche de repérage

Fiche élève

Fiche prof :

Eléments de recherche

Eléments de solution

Fiche de repérage

Niveau : lycée, 2nde à terminale

Domaine : géométrie plane

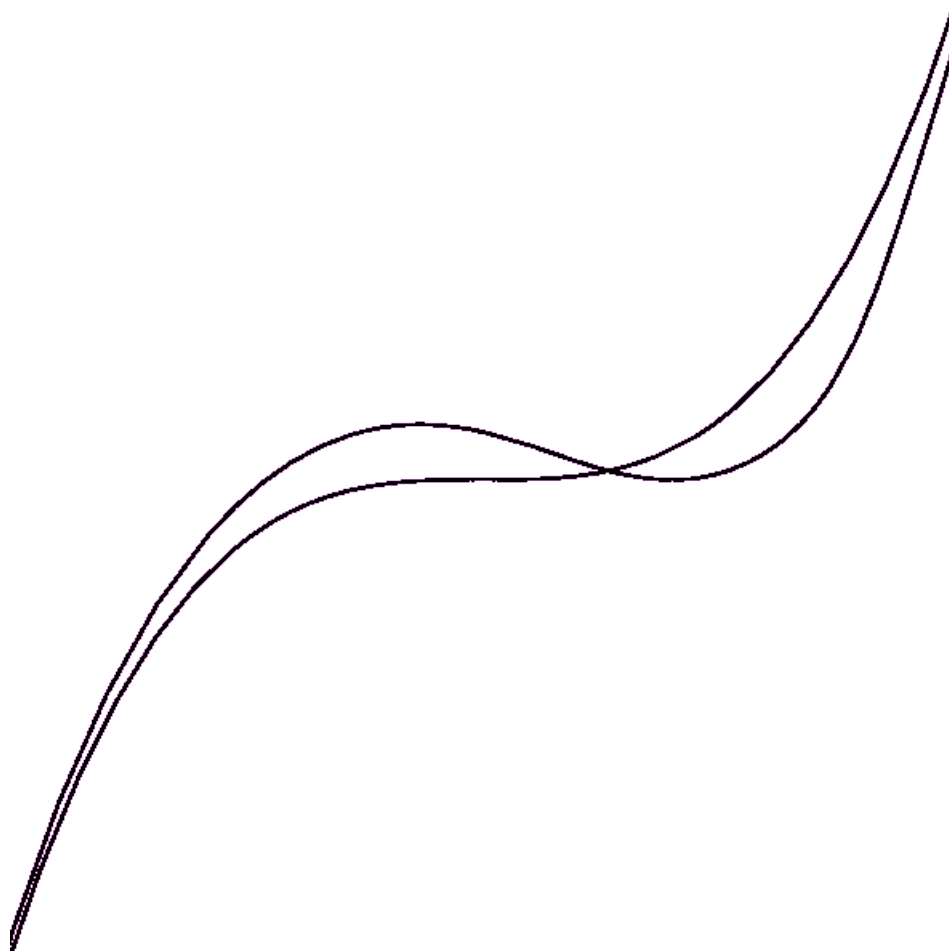
Présentation : ce problème ([lien avec le texte problème ouvert et débat](#)) a été cherché par le groupe RCPO pendant deux heures en présentiel. Il peut être donné comme problème ouvert à des élèves de lycée. C'est un problème de géométrie plane dont le principal intérêt est celui de la modélisation, et de la prise de choix qui en dépend.

Origine : Il s'agit d'un problème tiré de “Geometry and the imagination” (J. Conway, P. Doyle, J. Gilman, B. Thurston) [<http://math.dartmouth.edu/~doyle/docs/gi/gi/gi.html>], inspiré d'une nouvelle de Conan Doyle dans laquelle Sherlock Holmes se pose cette question (sans référence à une figure).

[Retour au sommaire](#)

Fiche élève

Un fragment de traces laissées sur le sol par les roues d'une bicyclette a été reporté sur la figure ci-dessous (à une échelle inconnue). Peut-on déterminer dans quel sens le vélo se déplaçait ?



[Retour au sommaire](#)

Fiche prof

Éléments de recherche

Le principal intérêt de ce problème est celui de la modélisation, et de la prise de choix qui en dépend.

La question elle-même pose souvent de gros problèmes aux élèves.

- Pourquoi se pose-t-on cette question ? Le problème peut être présenté comme une énigme policière, avec référence à Sherlock Holmes.
- S'agit-il de traces faites par un seul vélo, ou bien par deux ? Ne pourrait-il pas s'agir de deux vélos, puisqu'il y a deux traces ? Les élèves ont des difficultés à concevoir la nature des traces qu'un vélo peut laisser sur le sol. Pour les aider, on peut leur suggérer d'imaginer qu'ils poussent un vélo sur le sol, en regardant les roues se déplacer ; quel genre de traces vont-ils voir ? En particulier, la trace de la roue arrière va-t-elle toujours recouvrir celle de la première ?
- La vitesse joue-t-elle un rôle particulier ?
- Sait-on si le terrain monte ou descend ?
- Les dérapages sont-ils possibles ? Cette question est importante, puisqu'il s'agit de faire un choix raisonnable et de voir quel travail on peut faire à partir de ce choix. A priori rien n'empêche d'imaginer que le vélo a dérapé à l'endroit de la figure... Si les dérapages sont autorisés, on peut penser que “tout a pu arriver” (penser par exemple à un équilibriste ou à un virtuose du vélo acrobatique : sans doute peuvent-ils faire sur le sol des traces très étranges) et donc que le problème ne peut pas être résolu (on ne dispose pas d'assez de données). Pourtant, face au choix “dérapage ou pas dérapage”, on peut faire sentir aux élèves que l'on aboutit à deux problèmes dont l'un est contenu dans l'autre, et qu'il est en l'occurrence plus facile à résoudre le cas où la contrainte est la plus forte. A posteriori, on pourra d'ailleurs justifier ce choix, puisque l'analyse des traces montre qu'effectivement un vélo a pu faire ces traces sans réaliser de dérapage ; on en conclut que, si dérapages il y a eu, ceux-ci étaient probablement négligeables. Autre problème de modélisation pour les plus pointilleux : l'axe du guidon d'un vélo n'étant pas vertical, la distance entre les points de contact des roues avec le sol se modifie légèrement lorsque le vélo tourne... De même, peut-être peut-on négliger ce point dans un premier temps et voir si on arrive à quelque chose d'intéressant.

Une fois qu'il est acquis qu'il s'agit des traces laissées par un seul vélo au cours d'un même aller, les élèves essaient en général de distinguer les traces des roues avant et arrière. Deux conjectures naturelles apparaissent fréquemment:

- La roue arrière est celle qui parcourt le moins de chemin
- La roue avant est celle dont la courbure est la plus grande

Deux autres éléments de la figure attirent l'attention :

- Le point de croisement : comment l'analyser ? Donne-t-il des informations ?
- Les points d'inflexion des courbes : ils montrent le “moment” où le vélo a changé de direction. Arrivent-ils simultanément?

Pour aider à la résolution, on peut poser la question suivante, qui peut sembler étrange : “Quelle était la taille du vélo, à l'échelle du dessin ?” L'idée est de suggérer aux élèves de représenter le vélo en différents endroits du trajet, et de leur faire découvrir qu'un des deux sens est impossible si on veut que le vélo ait une taille constante.

Quelques prolongements possibles :

- Deux vélos de tailles différentes peuvent-ils laisser des traces identiques ?
- Est-il possible que les mêmes traces puissent être parcourues dans un sens et dans l'autre?

Eléments de solution

La clé du problème réside dans le fait que, à tout moment, les roues du vélo sont *tangentes* aux traces qu'elles laissent sur le sol. La roue arrière est, de ce point de vue, la plus intéressante car elle se trouve toujours dans l'axe du vélo (elle ne tourne pas). Si on prend un point de la trace de la roue arrière (AR sur le dessin ci-dessous) et qu'on prolonge sa tangente dans le sens de parcours, cette tangente doit couper la trace de la roue avant en un point (AV dans le dessin ci-dessous) de sorte que la distance entre AR et AV soit constante. Sur la figure proposée, cette analyse permet d'identifier les traces (roue arrière et roue avant) et de déterminer le sens de parcours.

[Retour au sommaire](#)