

# Abaque de Neper

													4096
													2048
													1024
													512
													256
													128
													64
													32
													16
													8
													4
													2
													1

## 1 Chapitre VII : Du mouvement des jetons dans l'abaque

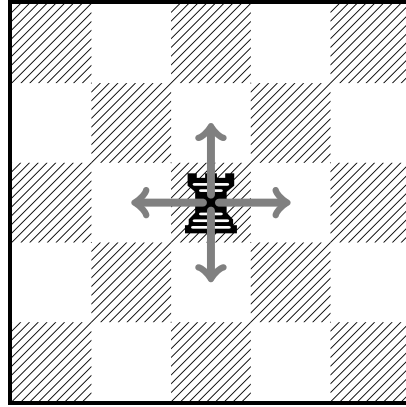
Neper fait référence à deux pièces du jeu d'échecs tel qu'il le connaissait. C'est surtout aux mouvements de ces pièces qu'il s'intéresse : les jetons de son abaque peuvent décrire de tels mouvements.

### 1.1 L'éléphant porteur de tour

L'éléphant de Neper (*elephantis turtiferi*) bouge comme la tour moderne, mais d'une seule case<sup>1</sup> :

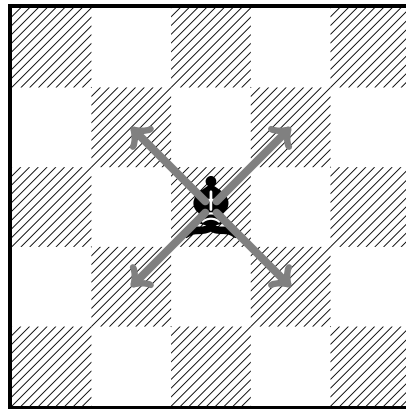
---

<sup>1</sup>Conway appelait *Duke* cette pièce.



## 1.2 Le porteur de flèches

Le porteur de flèches (*sagittiferi*, variante du vizir du jeu de Chatrang) bouge comme un fou mais d'une seule case<sup>2</sup> :



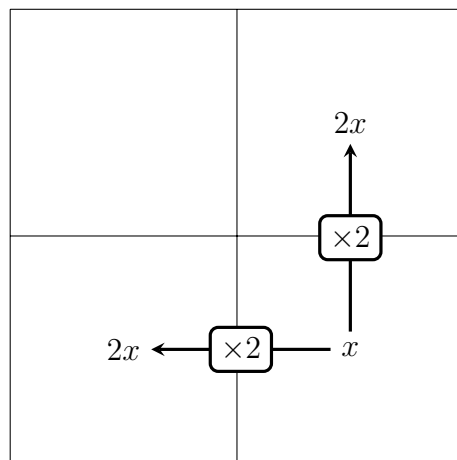
## 2 Chapitre VIII : Des axiomes et conjectures sur les mouvements de jetons

### 2.1 Axiomes

1. Axiome 1 : Si une case n'est pas à la marge inférieure ou de droite, sa valeur est double de celle de ses voisins de droite et de dessous.

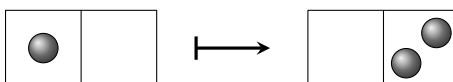
---

<sup>2</sup>Les pions du jeu *Alquerque* bougent aussi de cette manière. Les jetons du jeu de dames aussi.

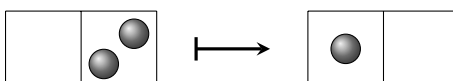


Un jeton dans une case vaut donc autant que deux jetons dans la case de droite. On peut donc, à tout instant,

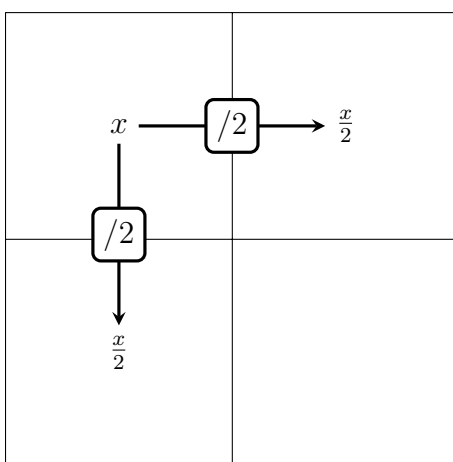
- enlever un jeton d'une case et remplacer ce jeton par deux jetons dans la case voisine (de droite, ou au-dessus) :



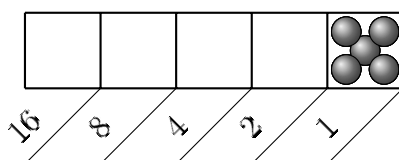
- ou à l'inverse, si une case contient 2 jetons, on peut les remplacer par un jeton unique dans la case voisine (de gauche, ou au-dessus) :



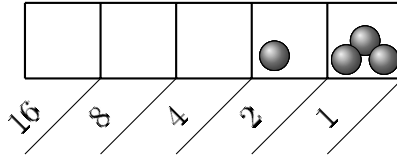
On peut d'ailleurs réinterpréter l'axiome 1 de cette manière :



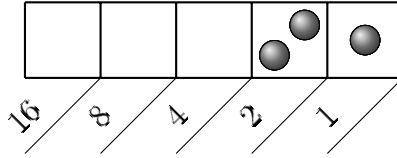
L'axiome 1 permet de trouver la représentation binaire d'un nombre. Par exemple si on veut savoir comment s'écrit 5 en binaire, on peut mettre 5 jetons dans la case des unités :



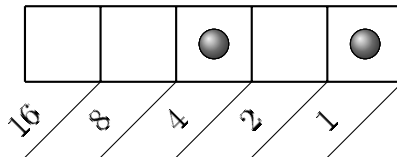
L'axiome 1 permet de retirer 2 de ces jetons en ajoutant un jeton dans la case des deuxaines :



Et comme il reste plus que 2 jetons dans la case des unités, on peut lui appliquer à nouveau l'axiome 1 :



Comme il reste moins de 2 jetons dans la case des unités, on ne peut plus lui appliquer l'axiome 1. Mais on peut appliquer l'axiome 1 à la case des deuxaines puisqu'elle contient 2 jetons :



Comme aucune case ne contient plus d'un jeton, on ne peut plus appliquer l'axiome 1 : on a maintenant l'écriture binaire de 5 qui est 00101 (ou 4+1).

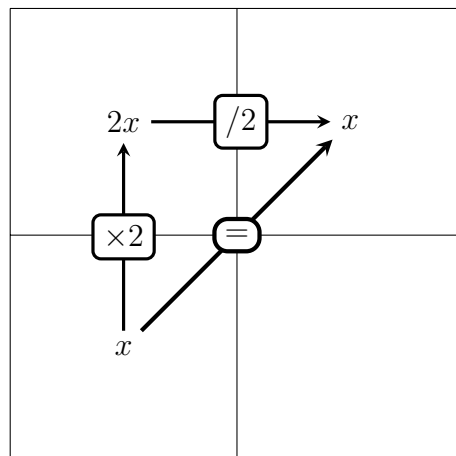
2. Axiome 2 : **Les valeurs des cases marginales (bord droit et bord inférieur) sont les puissances de 2.**

On remarque que cet axiome pouvait se déduire d'un axiome plus simple : la valeur de la case en bas à droite, est 1. En effet l'axiome 1 permet de remplir les bords à partir de cette valeur.

## 2.2 Corollaires

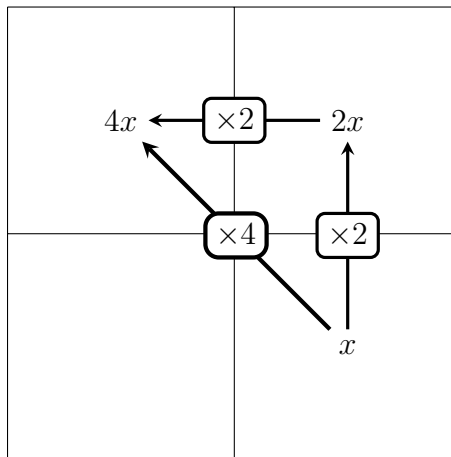
Des deux axiomes 1 et 2, Neper déduit des résultats qu'il appelle *corollaires*. En fait il s'agit de théorèmes.

1. Corollaire 1 : **Un mouvement en diagonale entre sud-ouest et nord-est ne change pas la valeur d'une case.**

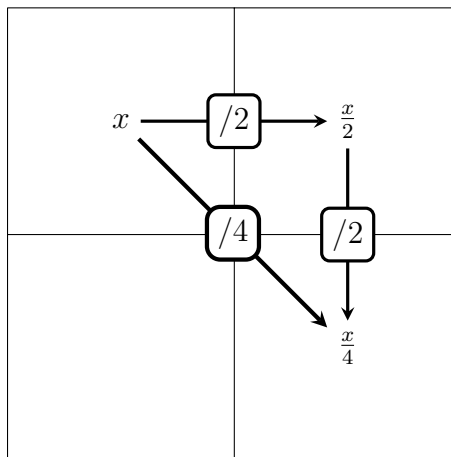


2. Corollaire 2 :

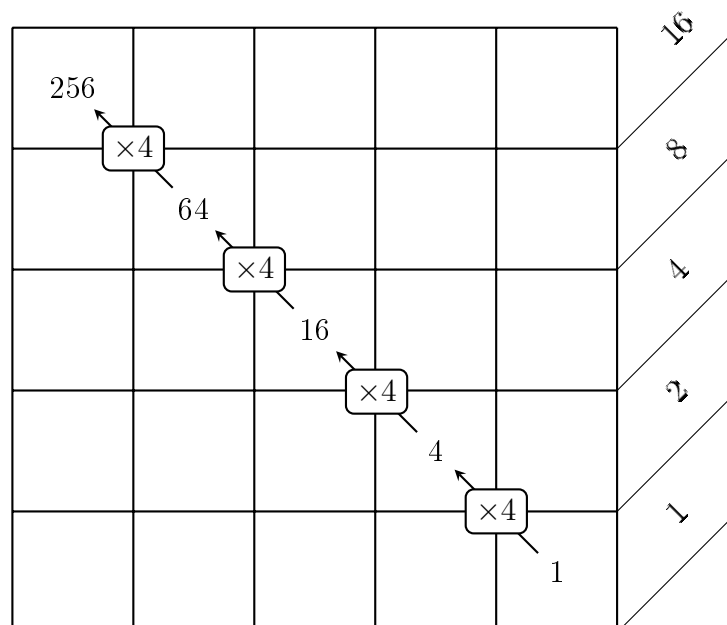
- Un mouvement vers le nord-ouest quadruple la valeur d'une case :



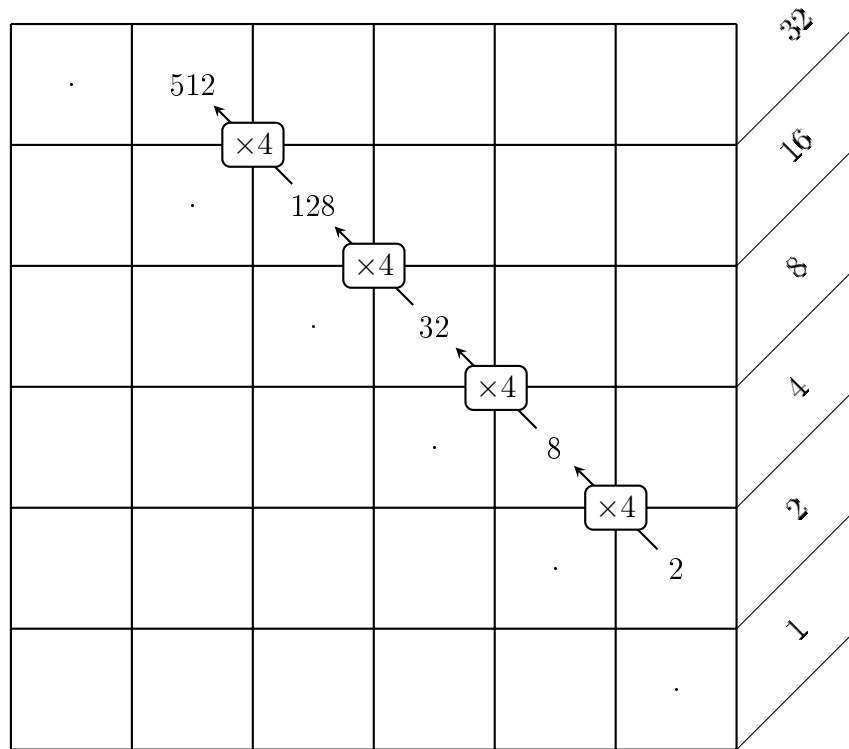
- En avançant vers le sud-est on divise la valeur de la case par 4 :



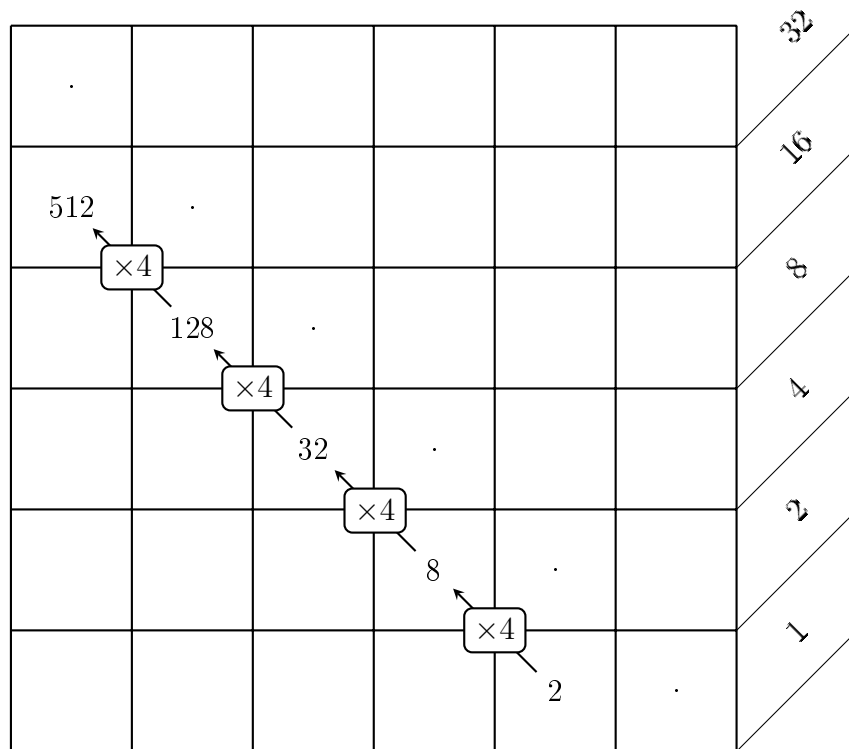
3. Corollaire 3 : Les valeurs sur la diagonale principale (celle qui est repérée par des points) sont les puissances de 4.



4. Corollaire 4 : Les cases au-dessus de la diagonale ont pour valeurs les doubles des puissances de 4.



5. Corollaire 5 : Les cases au-dessous de la diagonale ont aussi pour valeurs les doubles des puissances de 4.



6. Corollaire 6 : De façon analogue, les valeurs sur les diagonales parallèles à la diagonale principale, sont des produits de puissances de 2 par les puissances de 4.

7. Corollaire 7 : La valeur de chaque case est le produit des valeurs des cases situées en marge.

					16
	256	128	64	32	16
	128	64	32	16	8
	64	32	16	8	4
	32	16	8	4	2
	16	8	4	2	1
16					
8					
4					
2					
1					

### 3 Chapitre IX : De la multiplication

Le principe de la multiplication découle de la distributivité et du corollaire 7. Par exemple si on veut multiplier 5 par 9, on les écrit en binaire :

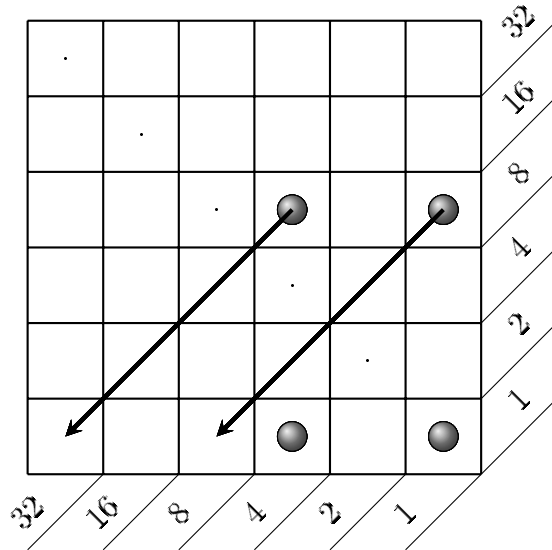
- $5 = 4 + 1$  (00101 en binaire ; dans la marge du bas)
- $9 = 8 + 1$  (01001 en binaire ; dans la marge de droite)

Alors  $5 \times 9 = (4 + 1) \times (8 + 1) = 4 \times 8 + 1 \times 8 + 4 \times 1 + 1 \times 1$  et chacun des 4 produits peut être représenté par un jeton ainsi disposé<sup>3</sup> :

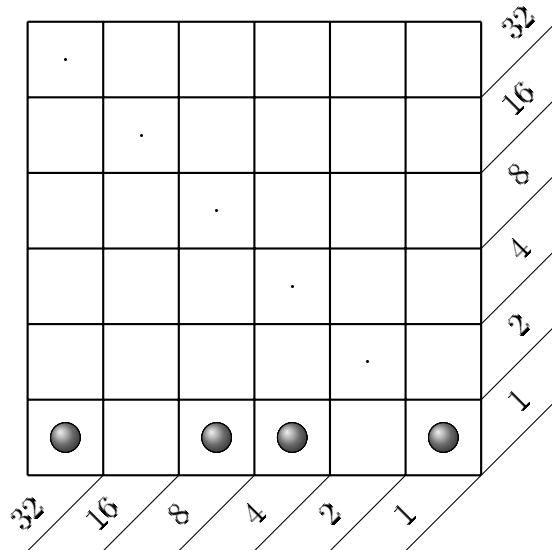
						32
						16
						8
						4
						2
						1
32						
16						
8						
4						
2						
1						

Une fois la multiplication posée, on l'effectue à l'aide du corollaire 1, en bougeant les jetons en diagonale jusqu'à ce qu'ils soient alignés (ici le long de la marge du bas) :

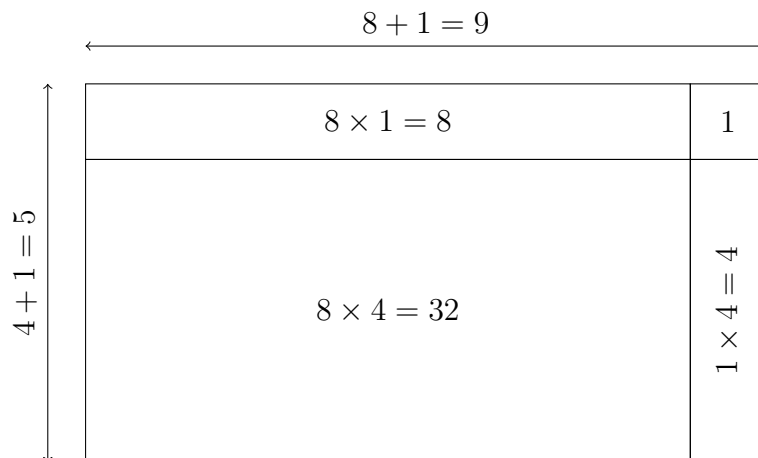
<sup>3</sup>En hommage à René Descartes, on appellera *produit cartésien* la pose des jetons pour une multiplication : mettre sur l'abaque, un jeton à chaque intersection d'une ligne et d'une colonne ayant un jeton dans la marge.



Ce qui donne l'écriture binaire du produit : 101101 ou  $32 + 8 + 4 + 1 = 45$  :



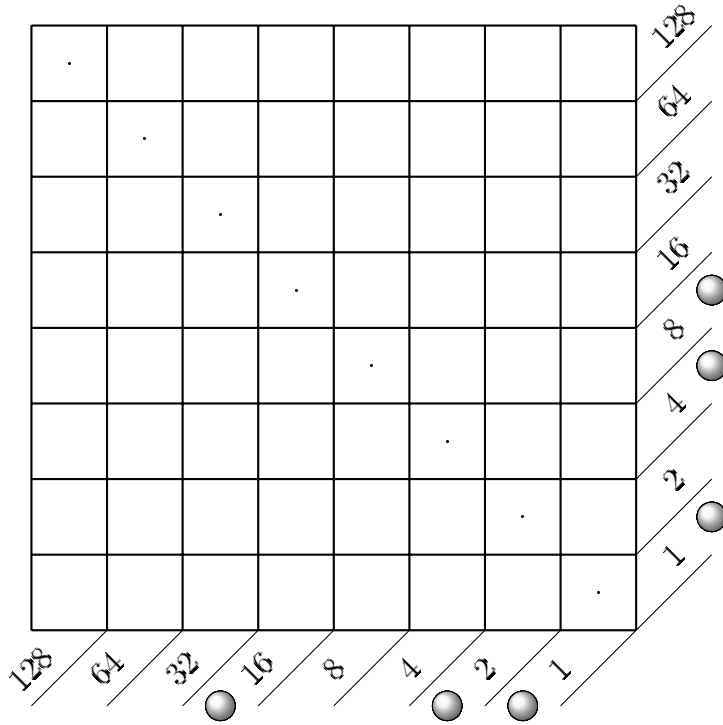
Remarque : on peut voir la décomposition binaire de 45 avec cette figure :



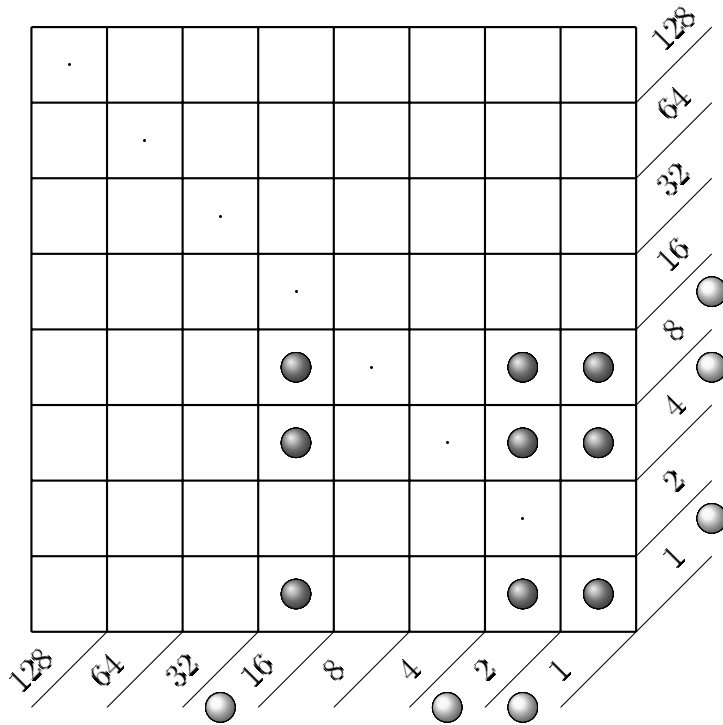


### Exemple

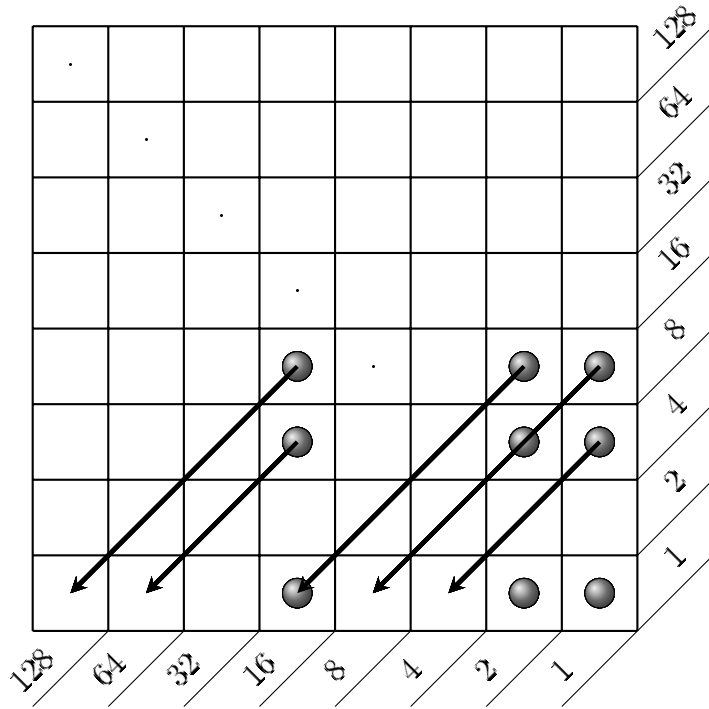
Pour multiplier  $19 = 16 + 2 + 1$  par  $13 = 8 + 4 + 1$ , on commence par représenter en binaire, les deux nombres 19 et 13, dans les marges :



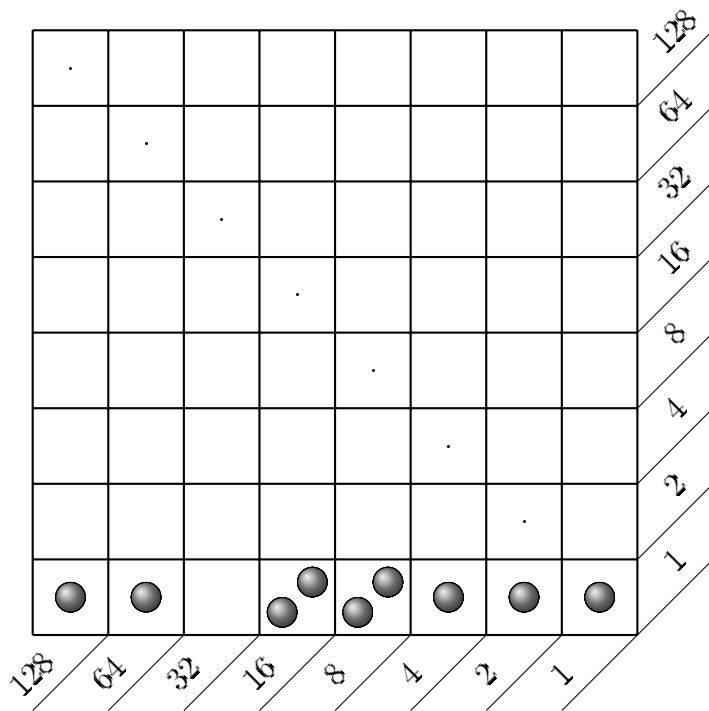
Puis on effectue le produit cartésien :



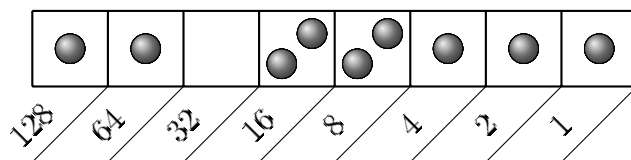
Ensuite, on utilise le corollaire 1 pour déplacer les jetons sans changer leur valeur :



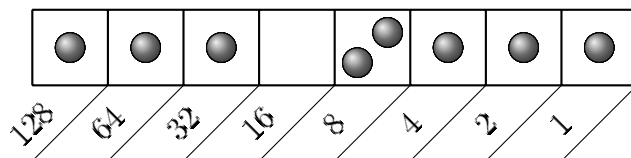
Alors la multiplication est effectuée, il ne reste plus qu'à utiliser l'axiome 1 pour simplifier le produit :



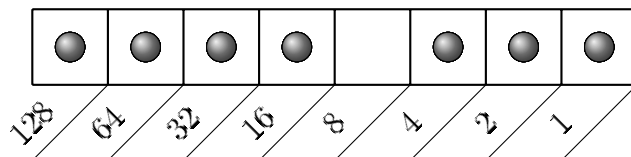
À partir de



on peut faire



puis

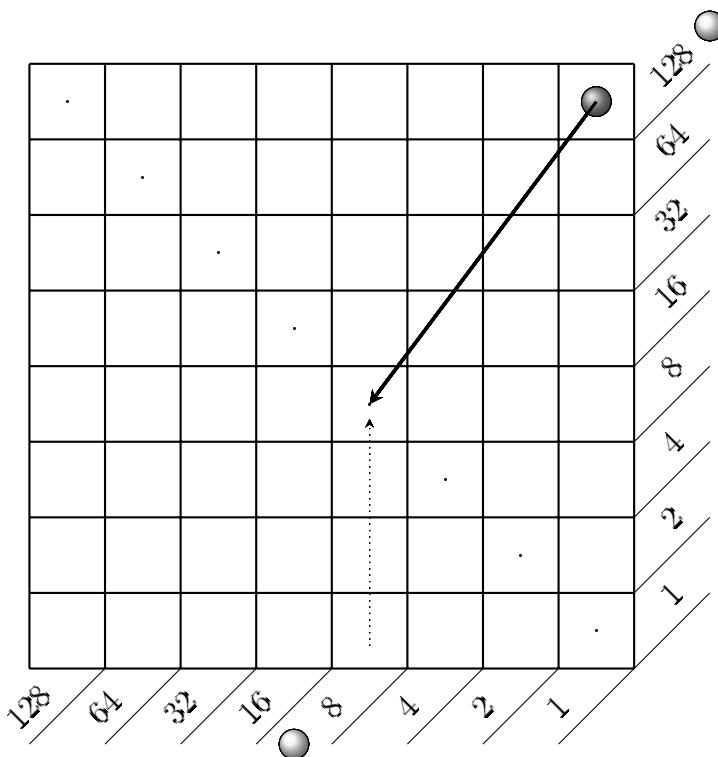


Et on lit, en binaire, le résultat de la multiplication : 11110111 ou  $128 + 64 + 32 + 16 + 4 + 2 + 1 = 247 : 19 \times 13 = 247$ .

## 4 Chapitre X : De la division

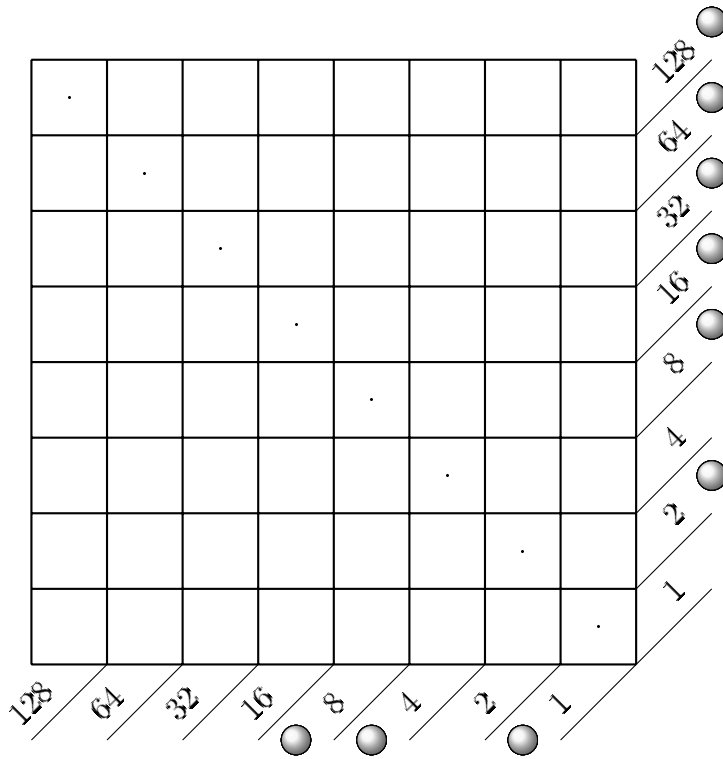
Pour effectuer une division (euclidienne), on essaye de reproduire un motif similaire aux produits cartésiens vus au chapitre précédent.

Par exemple, pour diviser 128 par 8, on fait faire ce trajet à un jeton valant 128 :

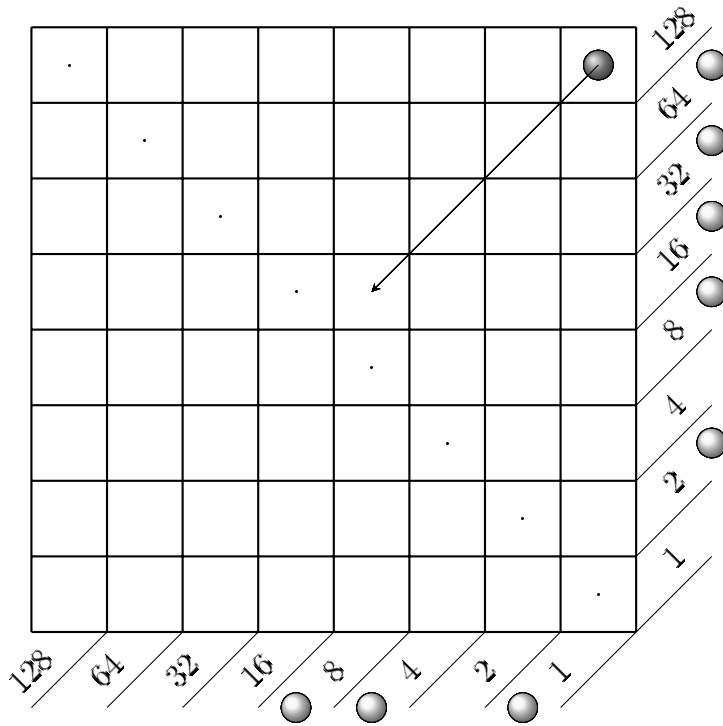


### Exemple

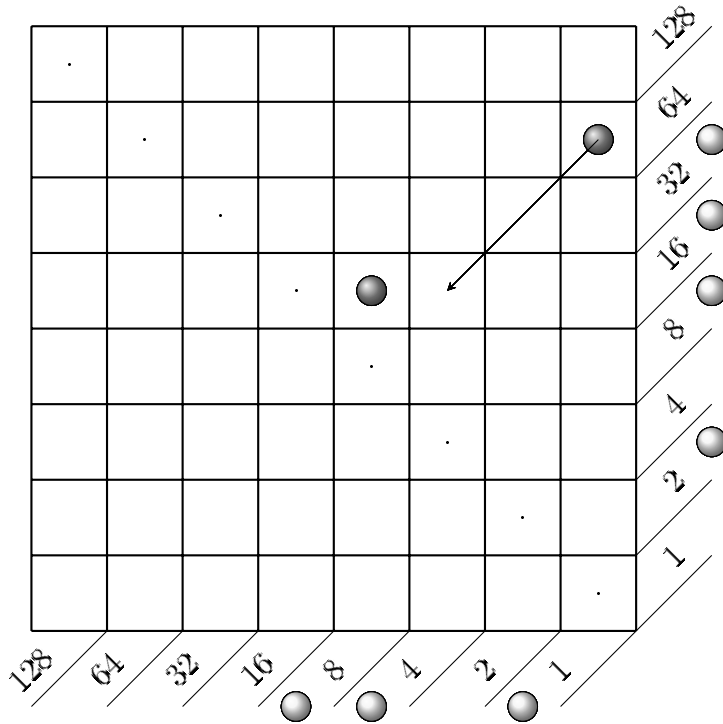
Pour diviser 250 (représenté verticalement dans la marge de droite comme  $128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 2$ ) par 13 (représenté dans la marge inférieure comme  $8 + 4 + 1$ ), on va essayer de reproduire le motif 1101 sur les lignes qui formeront le quotient :



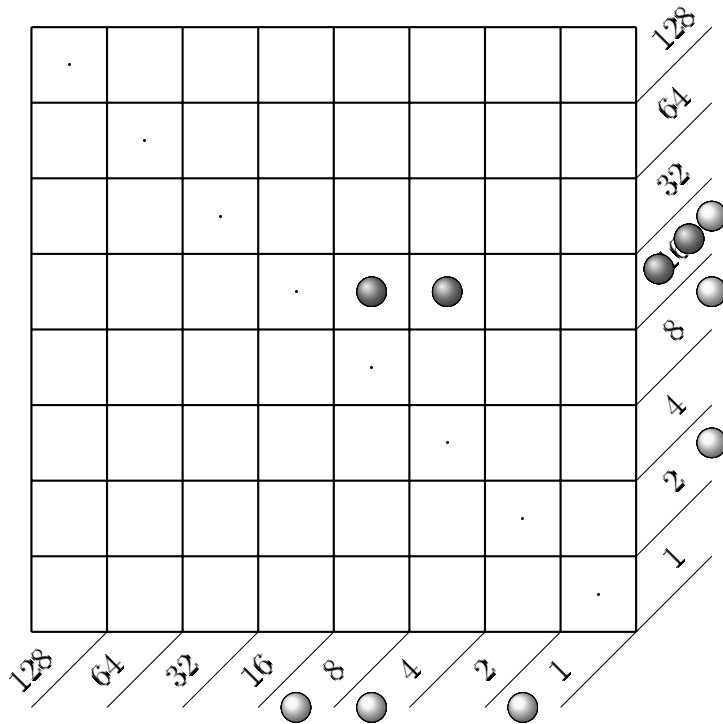
On commence par le poids fort, en utilisant le corollaire 1 pour les déplacements :



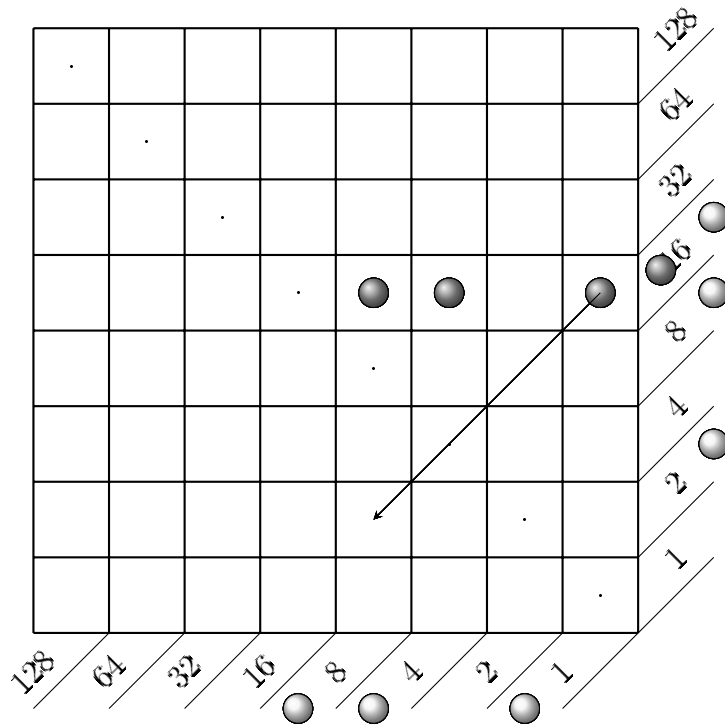
Pour l'instant on peut continuer avec le jeton valant 64 :



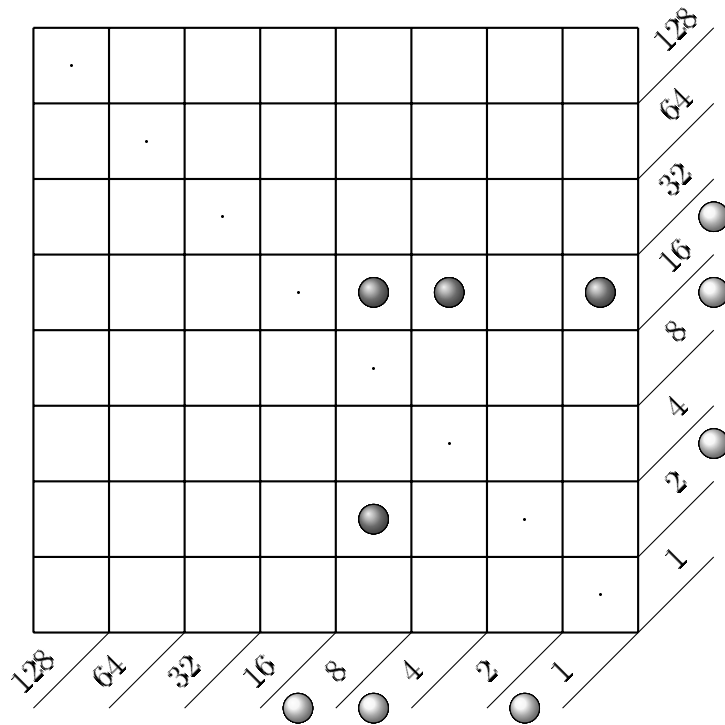
Mais il n'y a rien à mettre dans la colonne 2 (il n'y a pas de 2 dans l'écriture binaire de 13) alors on utilise l'axiome 1 :



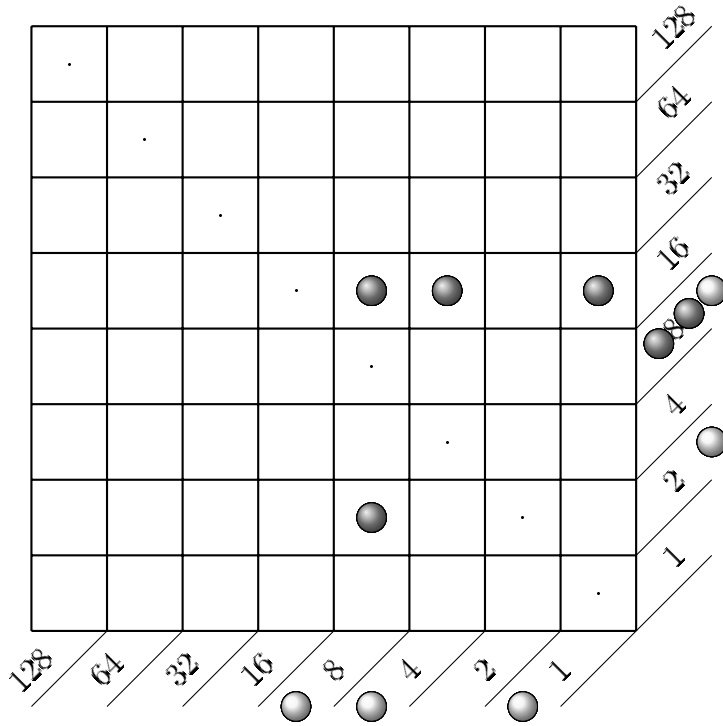
Un des jetons de valeur 16 va glisser selon le corollaire 1 pour continuer à former le quotient :



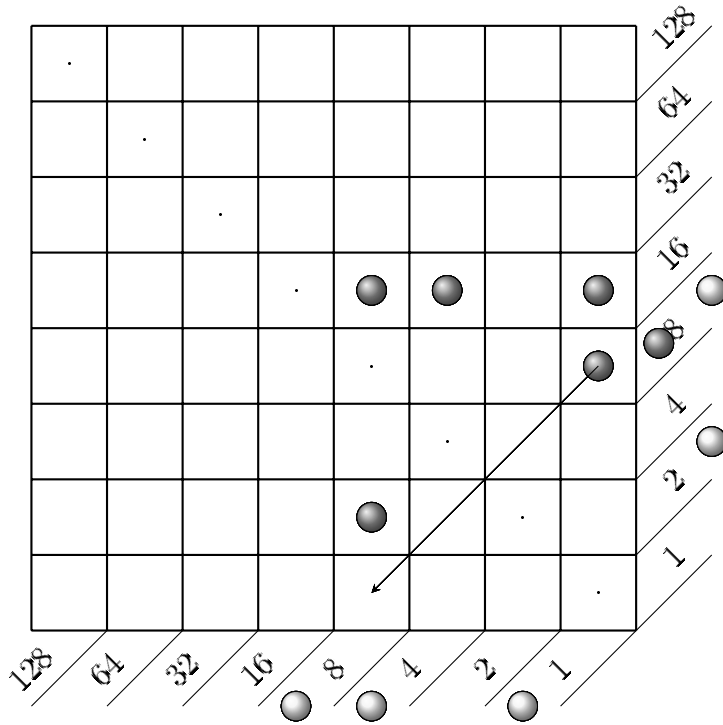
Un autre va se positionner pour finir le 13 d'en haut :



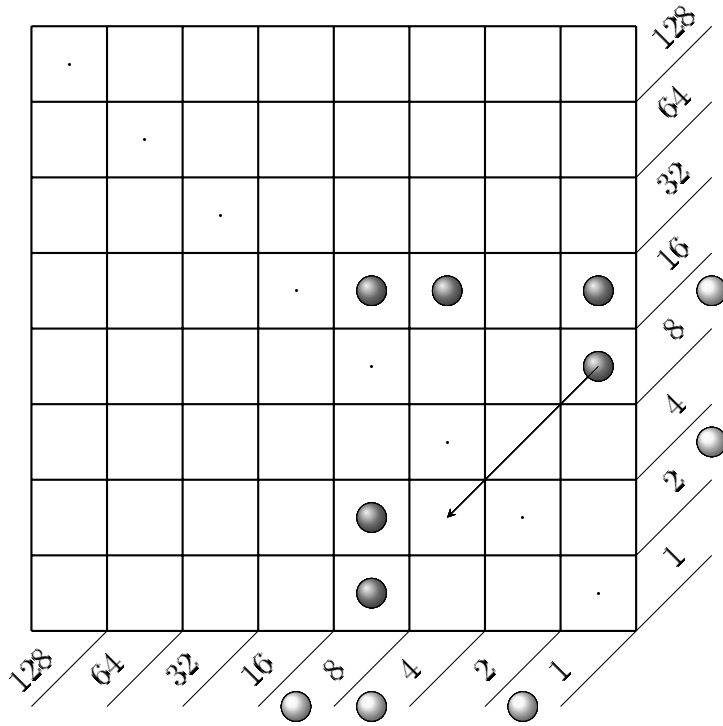
Et le dernier subira l'axiome 1 :



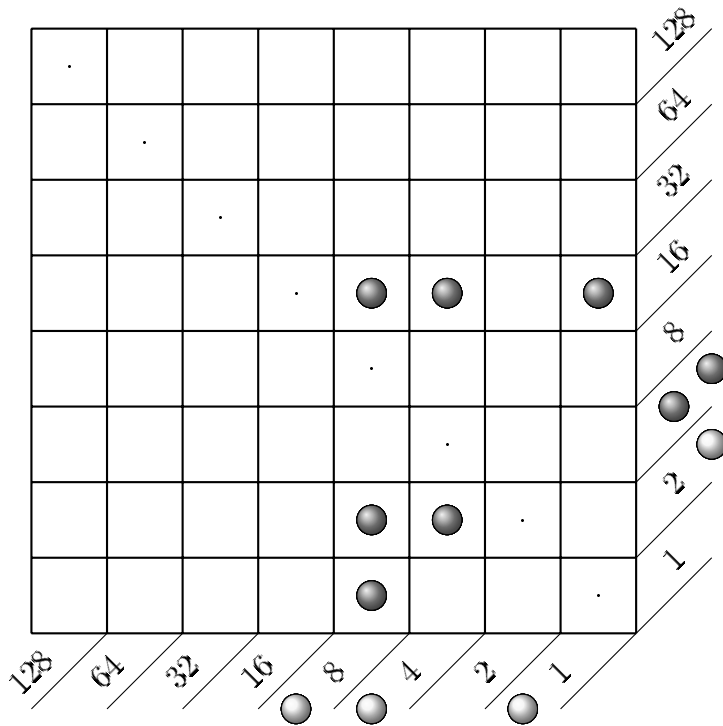
Un des 3 jetons de valeur 8 va en bas selon le corollaire 1 :



Le second continue l'écriture du 13 de la ligne 2 :

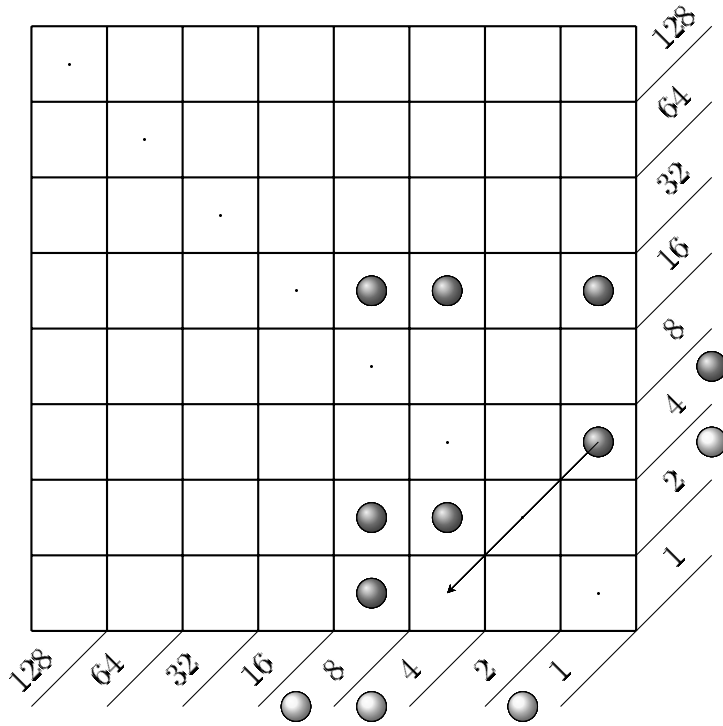


et le dernier subit l'axiome 1 :

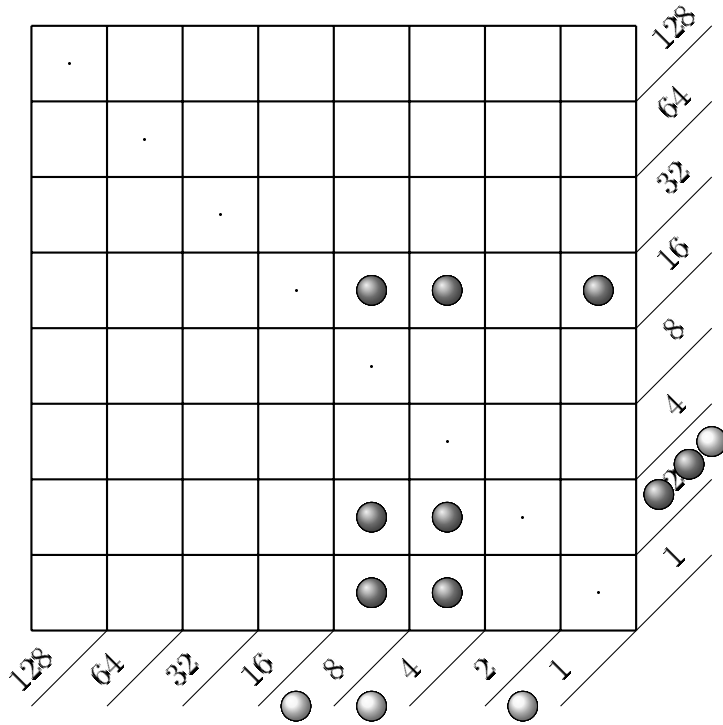


Un des deux jetons de valeur 4 va bouger pour continuer à former un 13 (en bas) :

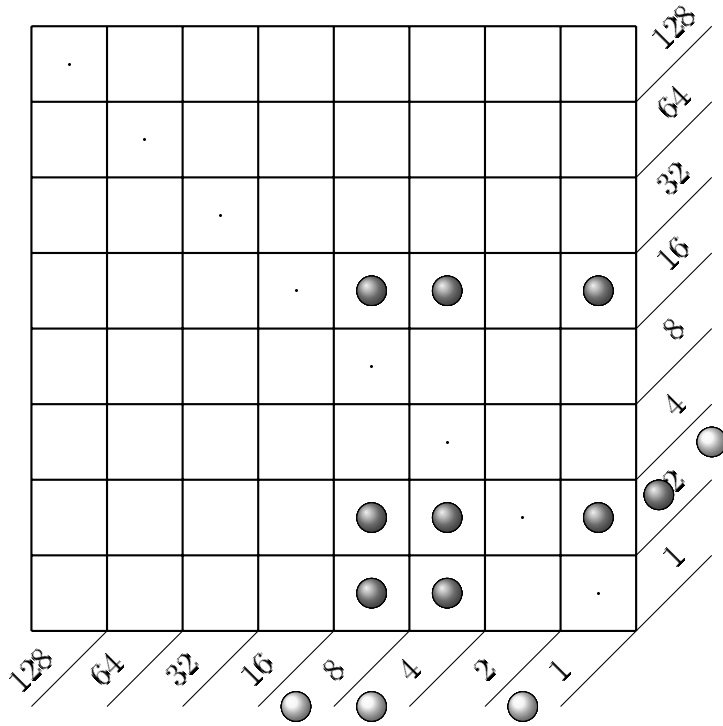




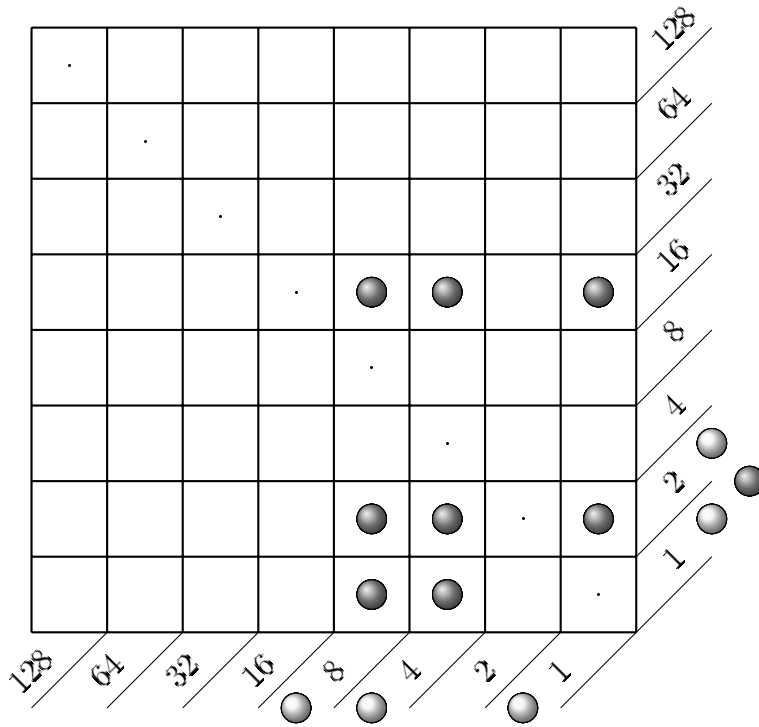
Et l'autre, n'ayant nulle part où aller, subit l'axiome 1 :



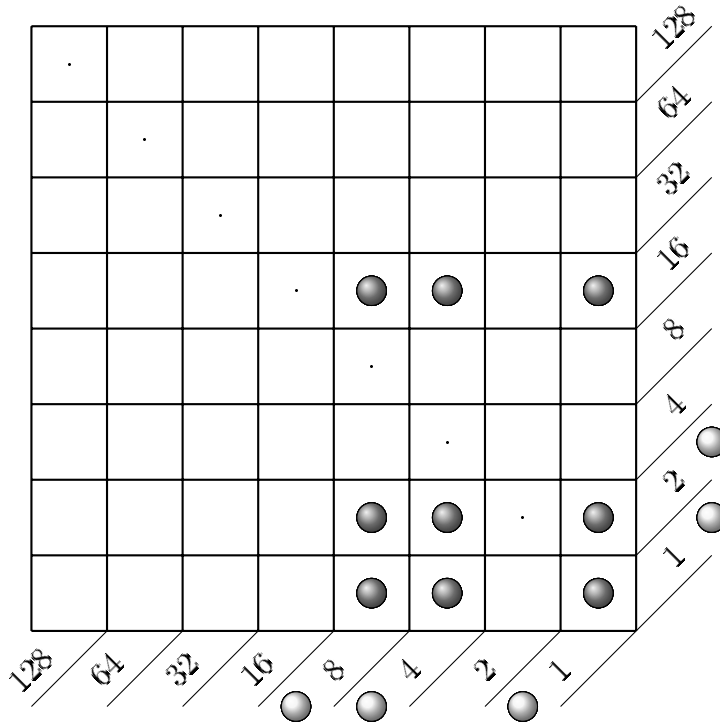
Parmi les 3 jetons de valeur 2, il y en a un qui complète l'écriture binaire du 13 à la deuxième ligne :



un qui subit l'axiome 1, et un qui reste (où irait-il ?) :



Enfin, l'un des jetons de valeur 1 sert à compléter le 13 d'en bas :

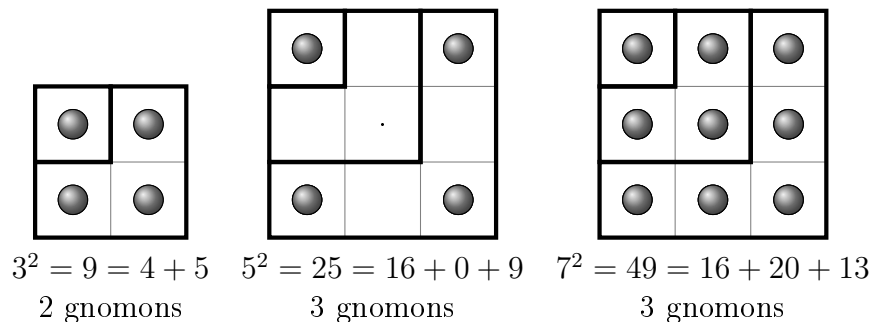


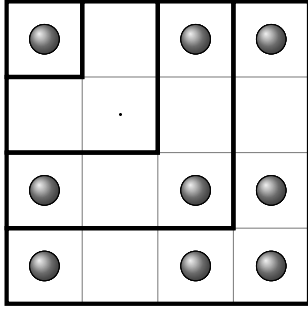
La division est terminée. On lit le quotient sur n'importe quelle colonne (10011 soit  $16+2+1 = 19$ ) et dans la marge de droite, les jetons qui restent représentent le reste  $2+1 = 3$ . En bref,  $250 = 19 \times 13 + 3$

## 5 Chapitre XI : Des extractions de racines carrées

### 5.1 Les gnomons

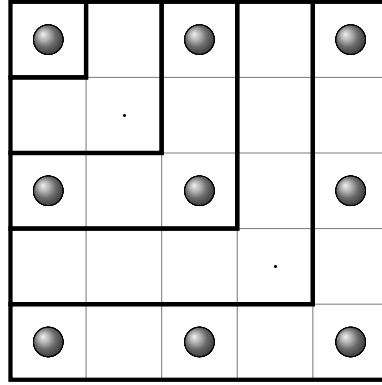
Pour extraire une racine carrée (entière), on essaye de reproduire un produit cartésien comme ceux du chapitre IX, mais qui soit symétrique par rapport à la diagonale principale (celle avec les points). L'algorithme de Neper pour extraire une racine carrée consiste à construire une telle figure, qui approche le plus possible, par en-dessous, le nombre dont on veut extraire la racine. Neper construit ce carré cartésien par des couches qu'il appelle *gnomons*. Voici quelques gnomons :





$$11^2 = 121 = 64 + 0 + 36 + 21$$

4 gnomons

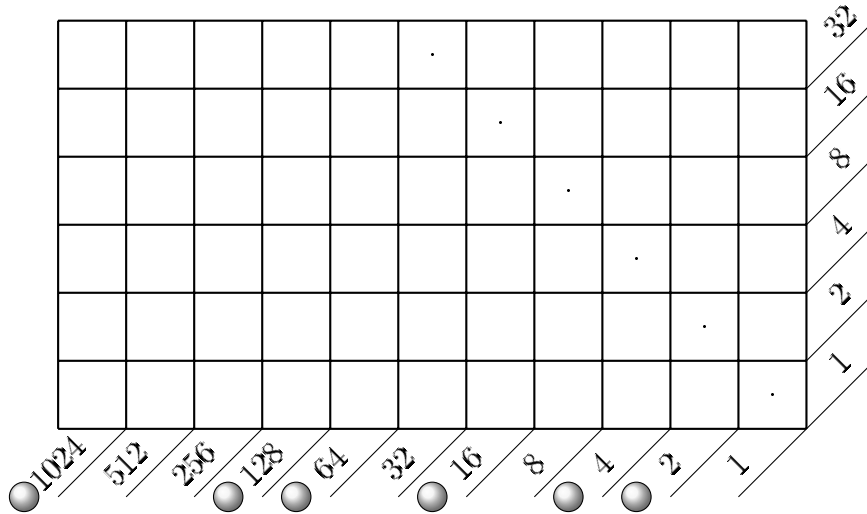


$$21^2 = 441 = 256 + 0 + 144 + 0 + 41$$

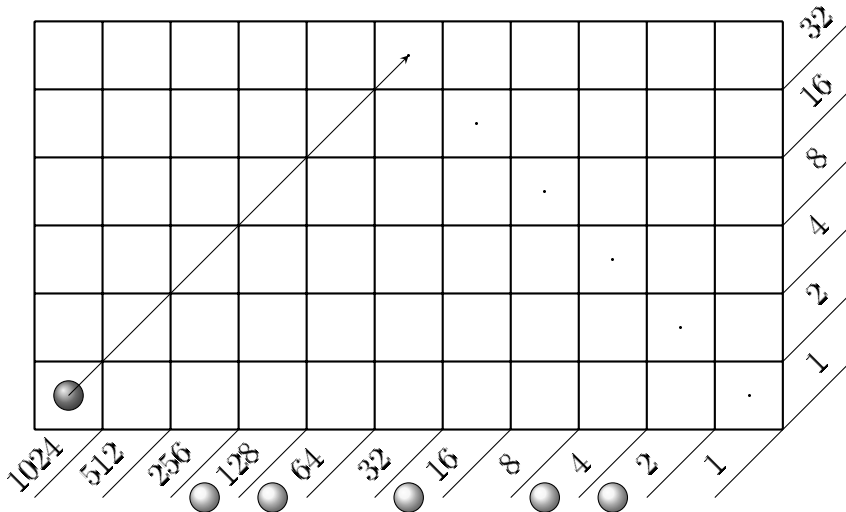
5 gnomons

## 5.2 Exemple

On veut extraire la racine carrée de 1238. On représente donc 1238 en binaire dans la marge basse :



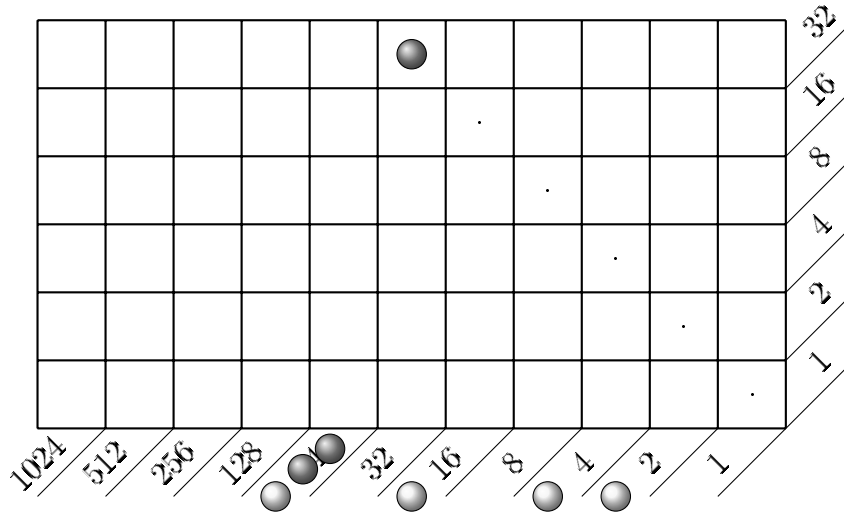
Le jeton de valeur 1024 peut aller jusqu'à la diagonale ( $1024 = 32^2$ ) :



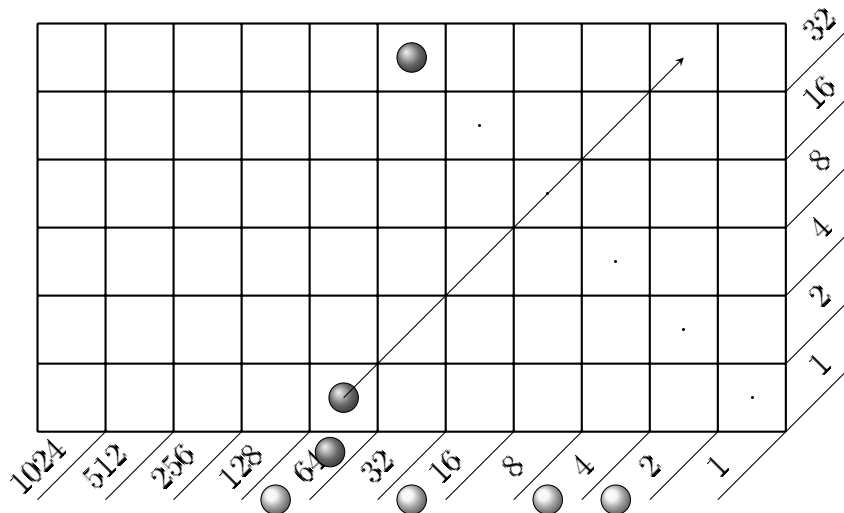
Alors il y va, constituant ainsi le *gnomon de tête*. Mais pour continuer la construction, il faudrait

- ou bien placer le jeton valant 128 sur la diagonale (ce qui est impossible car 128 n'est pas un carré)
- ou alors placer deux jetons valant 128 de part et d'autre de la diagonale, l'un tout en haut, l'autre tout à gauche. Or il n'y a qu'un seul jeton valant 128, cela est donc également impossible.

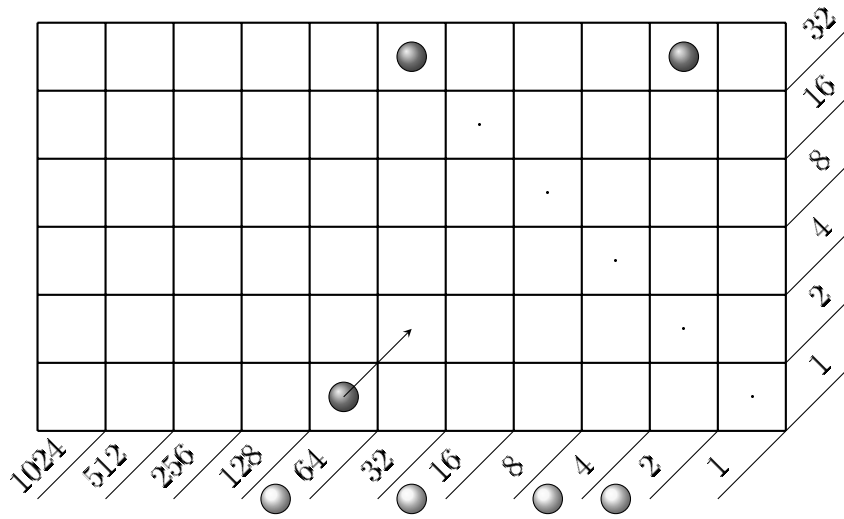
Alors on lui applique l'axiome 1 :



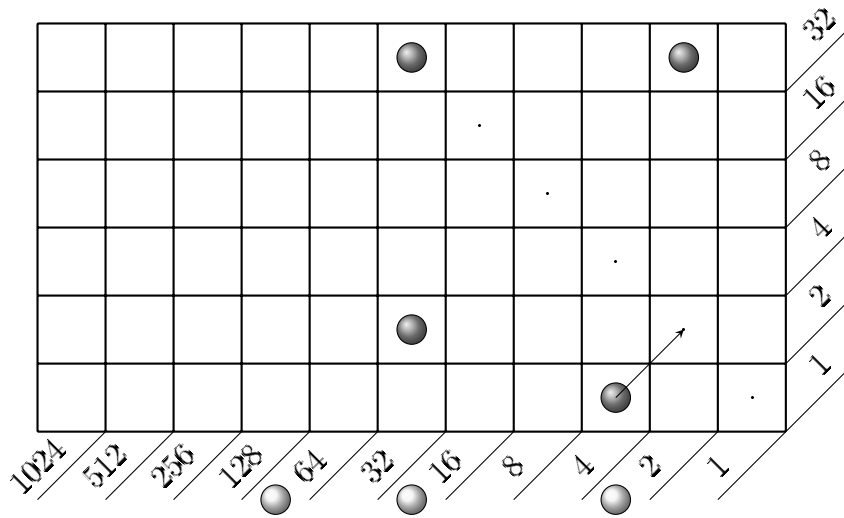
L'un des jetons de valeur 64 va sur la ligne supérieure du carré (les trois gnomons suivant le gnomon de tête de valeur  $32^2 = 1024$  sont donc vides) :



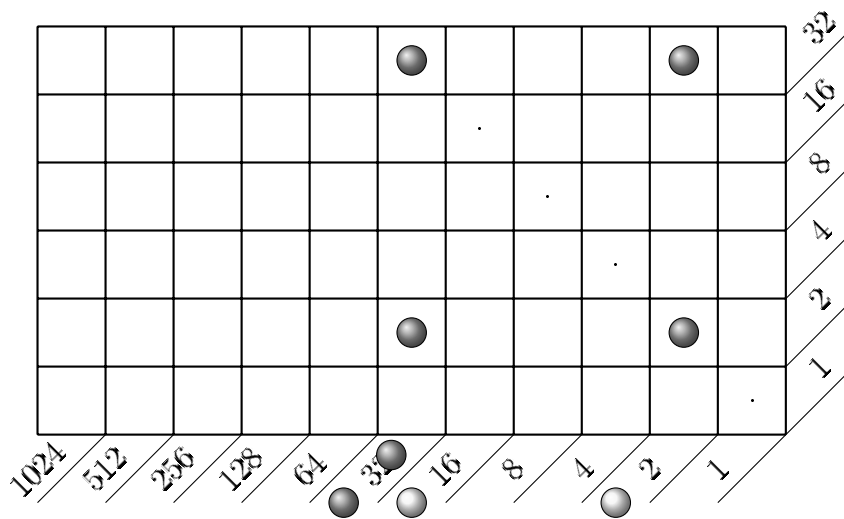
Un autre va sur la colonne le plus à gauche, continuant à constituer l'avant-dernier gnomon :



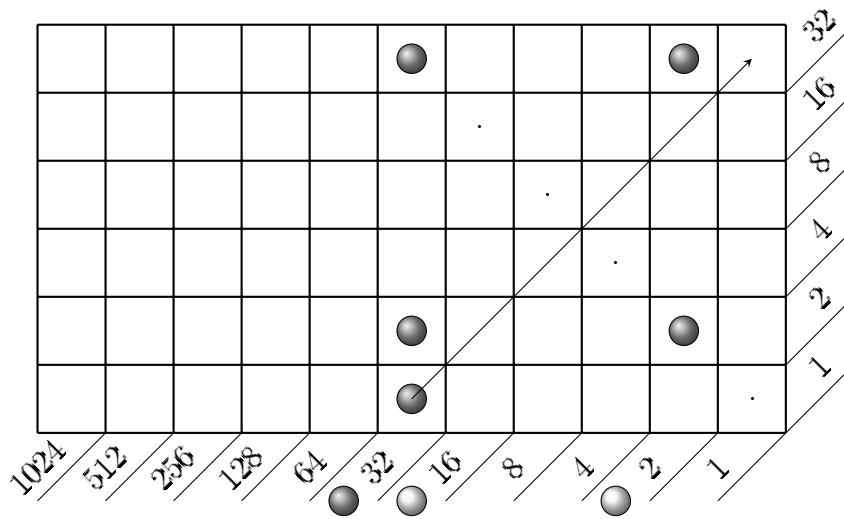
Ce gnomon (de valeur 129) peut être complété avec le jeton de valeur 4 :



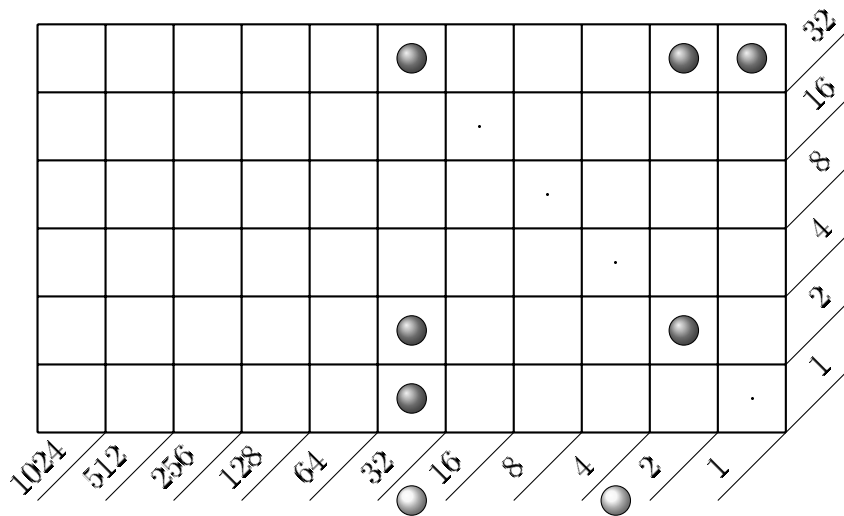
Le troisième jeton de valeur 64 subit l'axiome 1 :



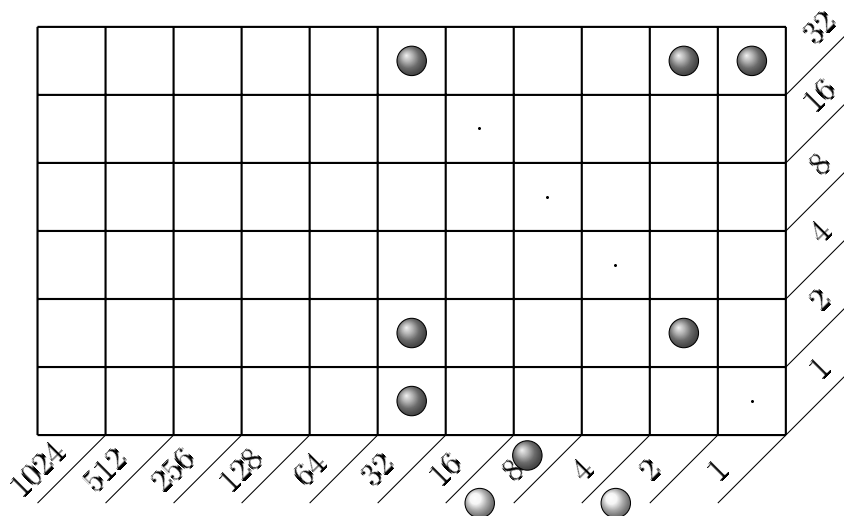
Un des jetons de valeur 32 peut aller sur le dernier gnomon :



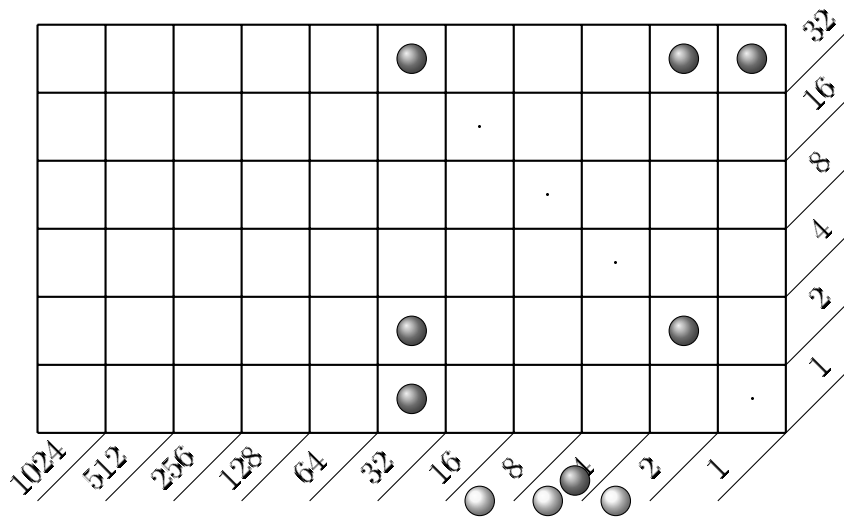
L'autre aussi :



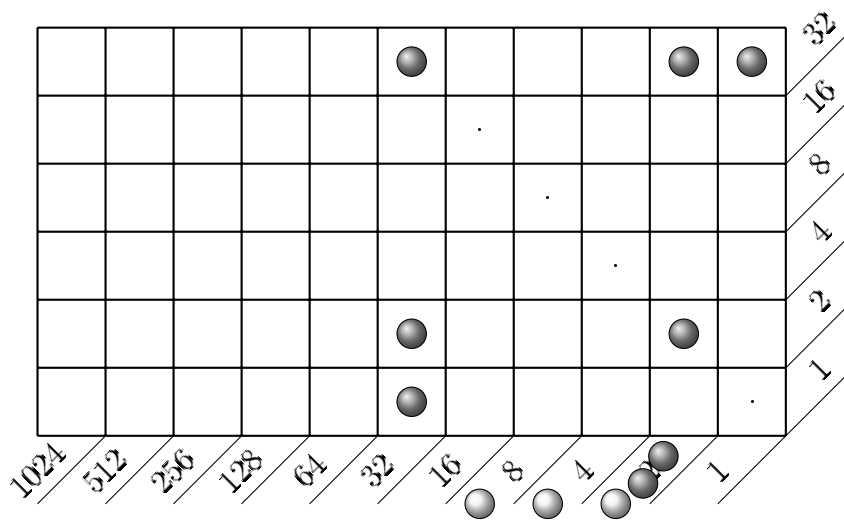
Pour compléter le dernier gnomon, il faut deux jetons de valeur 2 et un jeton de valeur 1. On n'en dispose pas, donc on applique l'axiome 1 au jeton de valeur 16 :



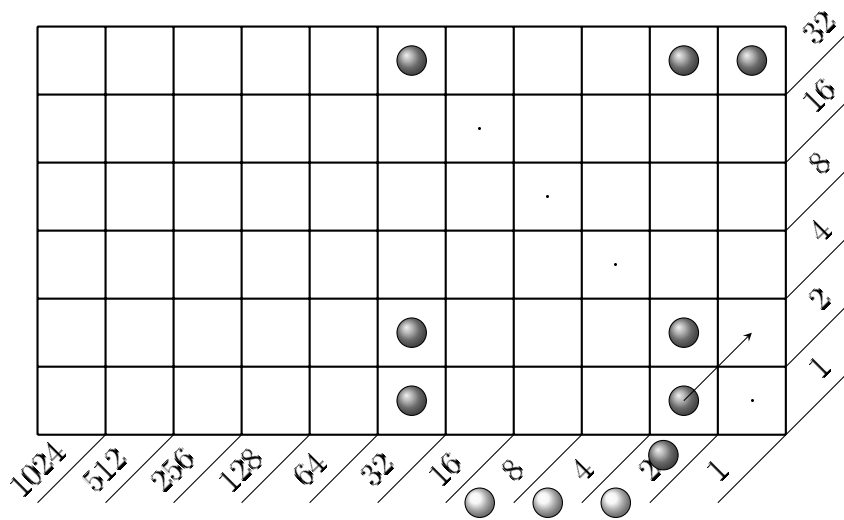
puis à un des deux jetons de valeur 8 :



puis à un des deux jetons de valeur 4 :

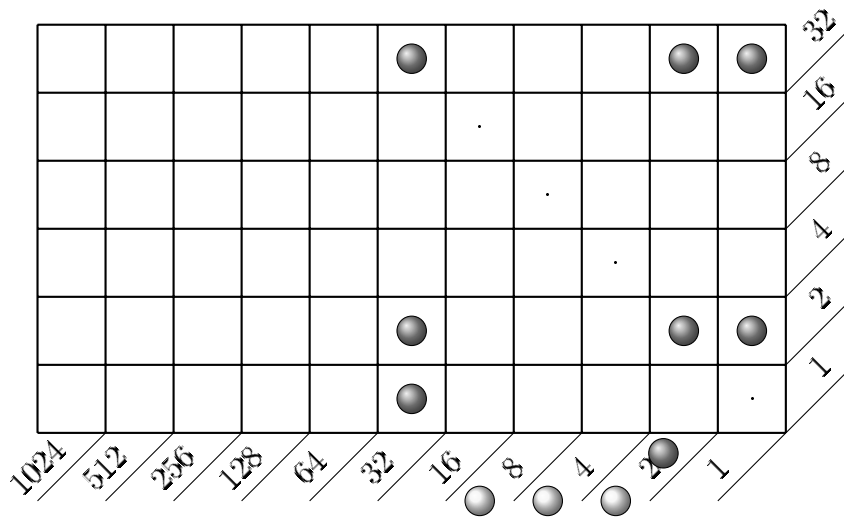


Un des jetons de valeur 2 peut aller sur le dernier gnomon à droite :

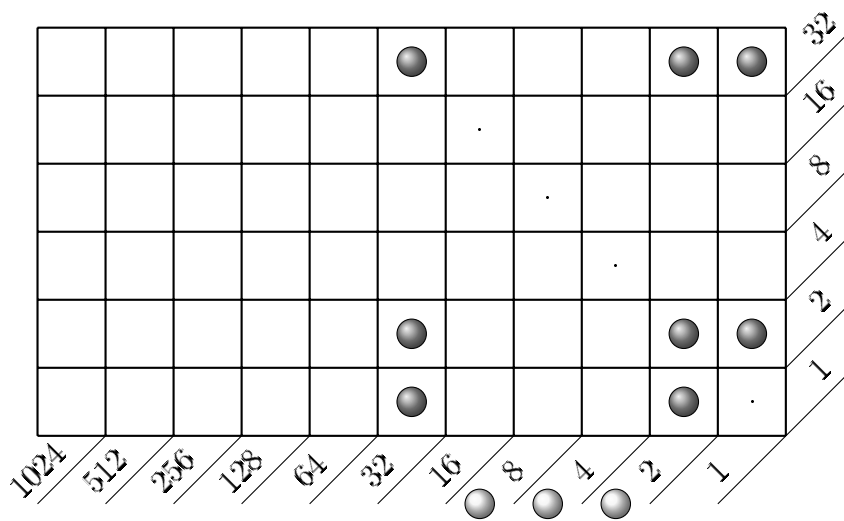


Alors il y va :

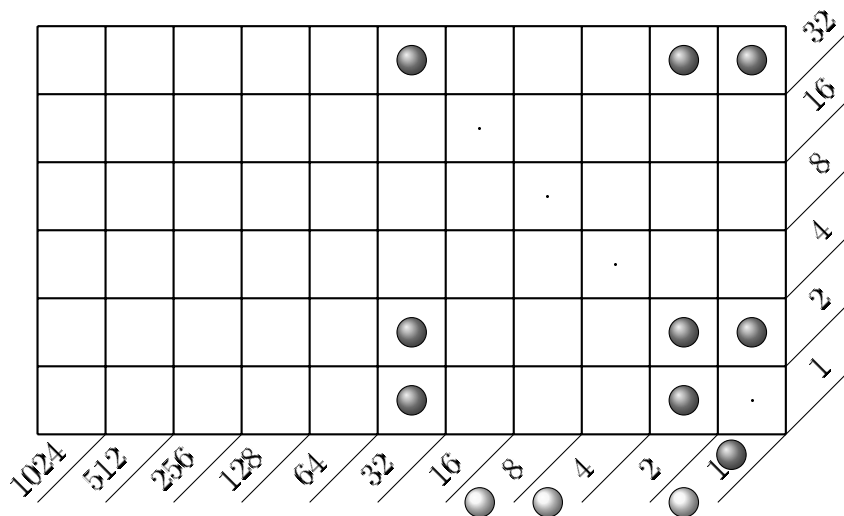




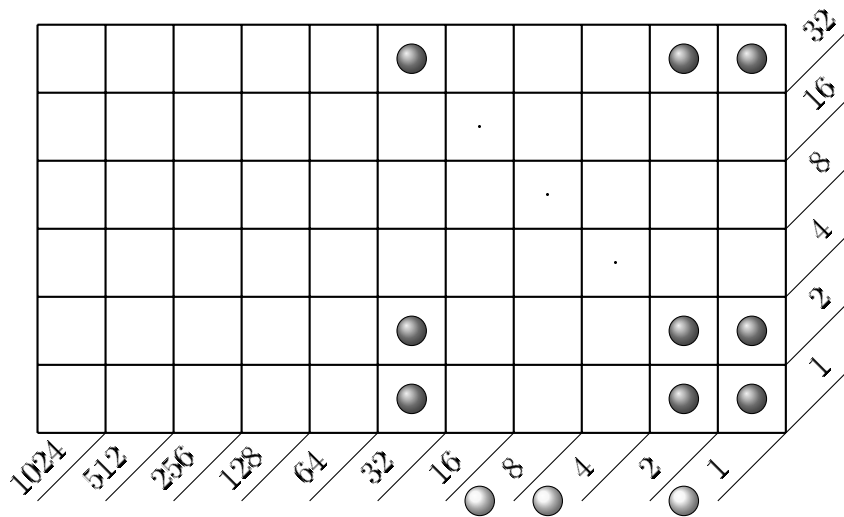
Un autre jeton de valeur 2 peut aller sur le gnomon :



Pour compléter le gnomon, il faudrait un jeton de valeur 1. Pour en obtenir un, il faut donc appliquer l'axiome 1 au jeton de valeur 2 :

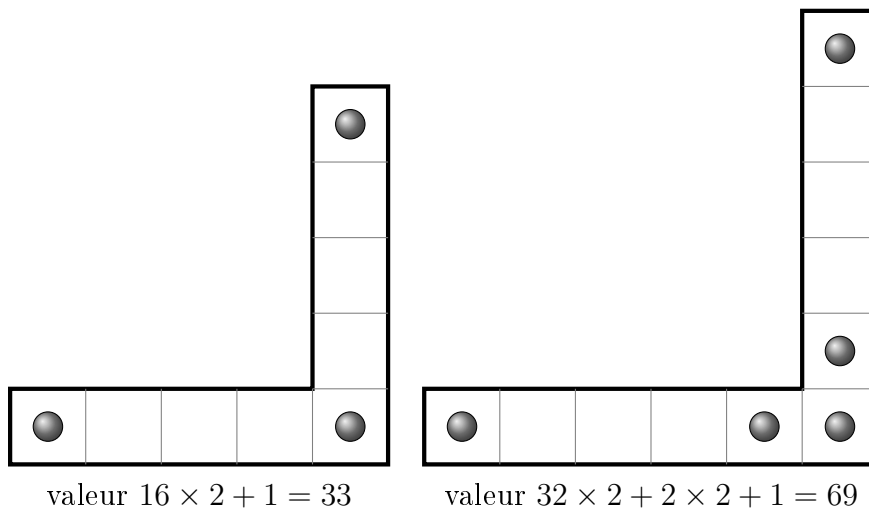


Un jeton de valeur 1 peut aller sur le gnomon :



Le calcul de la racine carrée est terminé, et on voit en bas un reste égal à  $8 + 4 + 1 = 13$ . La racine carrée entière valant  $32 + 2 + 1 = 35$ , on en déduit l'égalité  $1238 = 35^2 + 13$ .

Le gnomon de tête a pour valeur intrinsèque 1 (il n'y a qu'un seul jeton le constituant). Mais pour le placer on le fait glisser de 5 cases sur la diagonale, et sa valeur sur l'abaque est donc  $4^5 = 1024$ . Les deux autres gnomons non vides sont



Mais le gnomon de gauche, dont la valeur intrinsèque est 33, a été glissé d'une case sur la diagonale. Sa valeur sur l'abaque est donc  $33 \times 4 = 132$ . La valeur totale du carré est donc  $1024 + 132 + 69 = 1225 = 35^2$ .