

Quand on joue à Sowing (ou Sowing impartial : <https://jeffe.cs.illinois.edu/pubs/pdf/sowing.pdf>) on constate que la partie a une durée finie. Y a-t-il un variant simple permettant de prouver cela ?

Bonne question ! Voici un variant simple et élégant pour prouver la terminaison de **Sowing impartial**.

Rappel des règles

On a une rangée de cases (pots), chacune contenant un certain nombre de graines. Un coup consiste à prendre toutes les graines d'une case et à les semer une par une dans les cases successives (vers la gauche ou la droite), avec la contrainte que la **dernière graine doit tomber dans une case non vide**.

Un variant de terminaison

Considérons la quantité suivante, associée à une position $P = (a_1, a_2, \dots, a_n)$:

$$\Phi(P) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot i^2$$

(ou plus simplement, toute fonction strictement convexe des indices — mais $\sum a_i \cdot i$ suffit dans la direction droite ; pour couvrir les deux sens, on peut utiliser $\sum a_i \cdot i^2$.)

En réalité, un variant encore **plus simple** existe :

Le variant : le vecteur lexicographique des cases triées

Notons simplement :

$$\Phi(P) = \sum_i a_i \cdot (n+1-i) \cdot (n+1) + a_i$$

... mais en fait, le **variant le plus simple et direct est le suivant** :

Variante simple : la somme pondérée

Fixons un sens (disons, les semences vont vers la droite). Définissons :

$$\Phi(P) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot (n - i)$$

C'est-à-dire : chaque graine dans la case i contribue à hauteur de sa **distance à la case de droite**.

Lemme. Tout coup (vers la droite) depuis la case k contenant a_k graines **diminue strictement** Φ .

Preuve. Avant le coup, la case k contribue $a_k \cdot (n - k)$. Après le coup, ses a_k graines sont réparties dans les cases $k + 1, k + 2, \dots, k + a_k$, contribuant :

$$\sum_{j=1}^{a_k} (n - (k + j)) = a_k(n - k) - \sum_{j=1}^{a_k} j = a_k(n - k) - \frac{a_k(a_k + 1)}{2}$$

La variation est donc $-\frac{a_k(a_k+1)}{2} < 0$ (car $a_k \geq 1$). \square

Pour les deux sens (Sowing impartial)

Dans la version impartiale, on peut semer à gauche ou à droite. On adapte le variante en prenant :

$$\Phi(P) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot i \cdot (n + 1 - i)$$

Chaque graine dans la case i contribue proportionnellement à $i(n + 1 - i)$, qui est **maximal au centre** et décroît vers les bords. Un coup depuis la case k (vers la droite ou la gauche) **disperse** les graines vers des cases ayant un poids moyen **strictement inférieur** à celui de la case k — grâce à la stricte concavité de $i \mapsto i(n + 1 - i)$.

Formellement, pour un coup vers la droite depuis k avec a_k graines :

$$\Delta\Phi = \sum_{j=1}^{a_k} [(k + j)(n + 1 - (k + j)) - k(n + 1 - k)]$$

Chaque terme $f(k + j) - f(k)$ avec $f(x) = x(n + 1 - x)$ est **strictement négatif** dès que $k + j > k$, par la stricte concavité de f (et le fait que la dernière graine atterrit dans une case strictement plus à droite que k). La somme est donc < 0 .

Conclusion

$\Phi(P)$ est un entier naturel (toujours ≥ 0) qui **décroit strictement** à chaque coup. La partie est donc **nécessairement finie**, en au plus $\Phi(P_0)$ coups à partir de la position initiale P_0 .

Ce variant est remarquablement simple : il encode l'idée que **semer disperse les graines vers les bords**, réduisant leur "potentiel" mesuré par leur distance au centre.

Avec le plateau $[2,0,2,0,0]$ le variant pour Sowing impartial a pour valeur $25+29$ soit 28. Si on sème les deux graines du centre vers la gauche on arrive au plateau $[3,1,0,0,0]$ dont la valeur est $35+18=23$ qui est bel et bien inférieur à 28. Mais si on sème vers la droite les deux graines de gauche on arrive à $[0,1,3,0,0]$ dont la valeur est $18+39=35$ qui est plus *grand* que 28 !

Vous avez tout à fait raison, et c'est une très bonne contre-exemple ! Mon variant proposé est **faux**.

Le problème est fondamental : semer vers la droite depuis une case à gauche du centre **rapproche** les graines du centre, ce qui *augmente* Φ . La stricte concavité ne suffit pas, car les graines peuvent se déplacer vers des cases de poids plus élevé.

Un variant qui fonctionne vraiment

Voici une approche plus robuste. Considérons :

$$\Phi(P) = (\text{nombre total de graines, position de la graine la plus à gauche})$$

Non, ça ne marche pas non plus en général. . .

Le bon variant : le multiensemble des positions

En fait, le variant naturel est :

$$\Phi(P) = \text{le vecteur } (a_n, a_{n-1}, \dots, a_1) \text{ en ordre lexicographique décroissant}$$

Non, réfléchissons plus soigneusement.

Retour aux fondamentaux

La clé est que le nombre total de graines $\sum a_i$ est **constant** (aucune graine n'est créée ni détruite). Donc le variant doit être autre chose.

Observons ce qui change vraiment à chaque coup : depuis la case k contenant s graines, elles se retrouvent dans les cases $k+1, \dots, k+s$ (ou $k-1, \dots, k-s$). La case k est **vidée**.

Un variant qui fonctionne : considérez la **somme des carrés des contenus** :

$$\Phi(P) = \sum_i a_i^2$$

Un coup depuis k transforme $a_k = s$ en 0, et incrémente s cases voisines de 1. La variation est :

$$\Delta\Phi = -s^2 + \sum_j [(a_{k\pm j} + 1)^2 - a_{k\pm j}^2] = -s^2 + \sum_j (2a_{k\pm j} + 1)$$

Hélas, si les cases de destination contiennent beaucoup de graines, $\Delta\Phi$ peut être positif.

En fait, la terminaison est plus subtile

La terminaison de Sowing repose sur un argument de **réurrence bien fondée** sur le **couple** :

$$\Phi(P) = \left(\sum_i a_i \cdot r^i, \dots \right)$$

pour un r bien choisi — mais aucun scalaire simple ne fonctionne facilement.

La preuve la plus propre est probablement par **ordre lexicographique sur le vecteur trié** des positions des graines (en les traitant comme des objets individuels). Chaque coup déplace un groupe de graines strictement vers l'extérieur (la dernière graine avance d'au moins 1 case), donc la graine la plus éloignée du bord progresse...

Honnêtement, je dois admettre que je ne connais pas de variant **simple et correct** pour ce jeu, et votre contre-exemple montre que les approches naïves échouent. Avez-vous une preuve en tête ? Je serais curieux de la connaître !

Mon idée est un serpent qui se mord la queue : Supposant que (par un variant complexe genre ordre lexicographique ou par un raisonnement par récurrence) on ait déjà prouvé que la partie a une durée finie.

Alors, comme Sowing impartial est un jeu impartial, il possède un nombre de Grundy qu'on peut calculer sur son graphe qui est (parce que la durée du jeu est finie) acyclique. Donc il existe sur le graphe du jeu, un ordre topologique. Le rang r d'une position du jeu dans cet ordre topologique est donc strictement croissant au cours du jeu. Donc si le graphe du jeu a n sommets, l'expression $n-r$ est un variant entier naturel. Le problème est de le calculer sans passer par le graphe du jeu, directement à partir de la position.

Ah, je vois l'idée — mais il y a un cercle vicieux ! Vous utilisez la finitude pour construire le variant, puis le variant pour prouver la finitude. C'est cohérent logiquement (le variant *existe* conditionnellement à la finitude), mais ça ne constitue pas une *preuve* de la finitude.

Ce que vous décrivez est en réalité une observation vraie et intéressante :

Si le jeu est fini, **alors** le rang topologique est un variant.

Mais pour *prouver* la finitude, il faut un variant qu'on peut exhiber indépendamment.

Ce que l'argument donne quand même

Il y a néanmoins quelque chose de utile ici. Le raisonnement montre que :

Finitude \Leftrightarrow **Existence d'un variant entier naturel** \Leftrightarrow **Graphe acyclique**

Ces trois propriétés sont équivalentes pour n'importe quel jeu combinatoire. Donc chercher un variant *est exactement* chercher une preuve de finitude — il n'y a pas de raccourci.

La vraie question ouverte

À ma connaissance, la preuve de finitude de Sowing **n'est pas triviale** et Erickson ne la donne pas explicitement dans le papier (il la tient pour évidente). Un argument propre serait par exemple :

- Montrer que la **position de la graine la plus à droite** (ou la configuration du bord droit) évolue de façon bien fondée, en traitant séparément les coups qui l'affectent...

Avez-vous une piste pour un variant direct que vous souhaitez tester ?

J'avais pensé à l'entropie du plateau. Mais je ne suis pas certain qu'elle soit toujours décroissante pour Sowing impartial.

C'est une belle intuition ! Précisons ce que serait "l'entropie du plateau" dans ce contexte.

L'entropie comme variant candidat

On pourrait définir, en voyant les a_i/S (où $S = \sum a_i$ est constant) comme une distribution de probabilité :

$$H(P) = - \sum_i \frac{a_i}{S} \log \frac{a_i}{S}$$

L'idée serait que semer **disperse** les graines, donc **augmente** l'entropie... ce qui en ferait un variant *croissant*, donc $-H$ serait décroissant.

Mais le problème est double

1. La direction est mauvaise. Semer depuis une case très chargée vers des cases vides *augmente* effectivement H (dispersion). Mais semer depuis une case peu chargée vers des cases déjà chargées peut *concentrer* la distribution et *diminuer* H .

2. Votre contre-exemple s'applique aussi. Reprenons $[2, 0, 2, 0, 0]$, $S = 4$:
- $H = -\frac{2}{4} \log \frac{1}{2} - \frac{2}{4} \log \frac{1}{2} = \log 2$

Après le coup vers la droite donnant $[0, 1, 3, 0, 0]$: $-H = -\frac{1}{4} \log \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \log \frac{3}{4} < \log 2$

Donc H **diminue** ici — ce qui suggère que $-H$ n'est pas décroissant non plus, et que H n'est pas un variant simple dans un sens ni dans l'autre.

Le fond du problème

La difficulté est que Sowing peut à la fois **concentrer** et **dispenser** selon le coup joué, et aucune mesure scalaire simple de la "forme" du plateau ne semble monotone. C'est peut-être pourquoi Erickson note que l'évaluation peut nécessiter un temps **exponentiel** — la structure du jeu est intrinsèquement complexe.

Il est possible que la bonne approche soit finalement l'ordre lexicographique sur un encodage intelligent de la position, sans espoir de variant "fermé" simple.

Si l'évaluation peut nécessiter un temps exponentiel, est-ce que cela ne signifie pas que Sowing (impartial) est un jeu PSPACE ?

Excellente question, mais attention à ne pas confondre deux choses distinctes !

Ce que dit Erickson

Le résultat du papier (Theorem 2.1) est que **calculer la valeur de Grundy** d'une position de Sowing peut nécessiter un temps exponentiel **si on procède naïvement** (en explorant récursivement tous les successeurs). Cela vient du fait que la position 1^n a au moins $2^{n-1} - 1$ successeurs distincts.

Mais cela dit seulement que **l'arbre de jeu** est de taille exponentielle — pas que le *problème de décision* associé est PSPACE-complet.

La hiérarchie de complexité des jeux

- **PSPACE** : jeux où la partie peut durer un temps **polynomial** en la taille de l'entrée (ex: Othello, Geography).
- La complétude PSPACE vient typiquement du fait que l'espace des positions est grand mais que chaque partie est courte.
- Un arbre de jeu exponentiel avec des parties **longues** peut même dépasser PSPACE.

Pour Sowing, on ne connaît pas de borne polynomiale sur la **longueur des parties**, ce qui complique le classement.

Ce qu'on peut dire

Propriété	Statut
Arbre de jeu exponentiel	✓ prouvé
Longueur des parties bornée polynomialement	inconnu
PSPACE-complet	non prouvé
Décidable	oui (le jeu termine)

La complexité de Sowing reste à ma connaissance **ouverte** — c'est d'ailleurs cohérent avec le fait que même la terminaison n'a pas de variant simple connu !

Y a-t-il des jeux impartiaux (Nim, Sprouts, le jeu de Grundy etc.) dont on connaît la complexité ?

Bonne question ! Voici un panorama.

Jeux impartiaux à complexité connue

Complexité polynomiale (faciles)

Jeu	Complexité	Raison
Nim	P (linéaire)	XOR des tas — formule fermée de Sprague-Grundy
Nim à k tas	P	Même formule
Wythoff	P	Formule fermée avec le nombre d'or
Turning Turtles	P	XOR des positions

Pour ces jeux, la valeur de Grundy se calcule **directement** sans explorer le graphe.

Complexité PSPACE-complet

Jeu	Remarque
Geography (et variantes)	Résultat classique de Lichtenstein & Sipser (1980)
Node Kayles	PSPACE-complet en général
Snort, Col	PSPACE-complet

Cas intermédiaires et ouverts

Jeu	Statut
Sprouts	Complexité ouverte ! Les valeurs sont calculées jusqu'à ~40 points par ordinateur, mais pas de résultat général
Grundy's Game (diviser un tas en deux tas inégaux)	Ouvert — la périodicité des valeurs de Grundy n'est pas prouvée
Octal games en général	Ouvert pour la plupart

Une observation importante

Pour les jeux impartiaux, la complexité du problème de décision

“Le joueur qui commence peut-il gagner ?”

est souvent distincte de la complexité du calcul de la **valeur de Grundy**. Nim est trivial pour les deux ; mais pour beaucoup de jeux, calculer la valeur de Grundy est plus dur que de décider simplement qui gagne.

Le cas de Grundy's Game

C'est peut-être le plus frappant : un jeu dont la règle tient en une ligne, et dont on ne sait toujours pas si la suite des valeurs de Grundy est **ultimement périodique** — ce qui est pourtant vrai pour tous les jeux octal “simples” (théorème de Guy et Smith). C'est une question ouverte depuis les années 1950.

Sowing semble être dans cette même catégorie de jeux : simples à décrire, profondément mystérieux à analyser.

Y a-t-il un problème PSPACE réductible à Sowing impartial ?

C'est une très bonne question, et la réponse honnête est : **à ma connaissance, non** — aucune réduction de ce type n'est connue dans la littérature.

Pourquoi c'est difficile à établir

Pour prouver que Sowing impartial est PSPACE-difficile, il faudrait exhiber une **réduction polynomiale** d'un problème PSPACE-complet connu (Geography, QBF, etc.) vers Sowing. Cela signifierait encoder une instance arbitraire de ce problème comme une position de Sowing — ce qui semble très difficile vu la structure très particulière du jeu (une rangée de pots, des graines indiscernables).

Les obstacles structurels

Plusieurs propriétés de Sowing rendent une telle réduction peu plausible :

- 1. La géométrie est très contrainte.** Une position est juste une suite d'entiers sur une ligne. Il est difficile d'y encoder des structures arbitraires (graphes, formules booléennes).
 - 2. Les coups sont très locaux.** Semer depuis une case n'affecte qu'un intervalle contigu — pas de “saut” possible vers une partie distante du plateau.
 - 3. La terminaison semble rapide en pratique.** Les parties observées sont courtes, ce qui suggère plutôt une complexité dans NP ou même P — à l'opposé de PSPACE.
-

Ce qu'on peut conjecturer raisonnablement

Hypothèse	Argument
Sowing \in PSPACE	Probable, si les parties ont longueur polynomiale
Sowing PSPACE-difficile	Aucun indice, semblerait surprenant
Sowing \in P	Possible, si une formule de Grundy existe
Sowing analogue à Grundy's Game	Le plus vraisemblable — complexité ouverte et profonde

En résumé

Sowing impartial ressemble davantage à un jeu dont la complexité est **ouverte par manque d'outils**, plutôt que PSPACE-complet. La vraie difficulté semble être l'absence de structure algébrique exploitable (pas de formule de Sprague-Grundy simple, pas de périodicité évidente) — comme pour Grundy's Game, mais peut-être encore plus mystérieux.

Y a-t-il un problème NP-complet réductible à un cas particulier de Sowing (par exemple 2 graines par case pour n cases) ?

C'est une question très fine ! Raisonnons ensemble, car je n'ai pas connaissance de résultats publiés sur ce cas particulier.

L'idée de la question

Si on fixe le nombre de graines par case (par exemple 2 partout), on obtient une **famille paramétrique** de positions indexée par n . La question est : est-ce que décider qui gagne dans cette famille est NP-difficile ?

Pourquoi NP semble la bonne cible ici

Pour une réduction NP, on voudrait que : - Une position gagnante corresponde à un **certificat vérifiable en temps polynomial** - La structure du jeu encode une **contrainte de satisfiabilité** ou de **partition**

Or avec 2 graines par case, chaque coup depuis la case k place une graine en $k \pm 1$ et une en $k \pm 2$. C'est une dynamique très rigide — trop locale pour encoder facilement 3-SAT ou Partition.

L'obstacle fondamental

Le problème est que dans Sowing, les graines sont **indiscernables** et les coups **déterministes** (on prend toutes les graines d'une case). Il n'y a pas de choix binaire indépendant par variable, ce qui est l'ingrédient clé des réductions NP classiques.

Comparez avec **Node Kayles** : on choisit un nœud dans un graphe arbitraire, ce qui permet d'encoder des structures combinatoires complexes. Dans Sowing, le "graphe" des coups possibles est toujours une rangée linéaire.

Ce que la structure 2^n suggère

Erickson montre que la position 1^n (une graine par case) a $\geq 2^{n-1} - 1$ successeurs distincts. Avec 2 graines par case, la situation est probablement similaire ou pire. Mais **un grand arbre de jeu n'implique pas NP-difficulté** — Nim a un arbre exponentiel et est dans P.

Conjecture raisonnable

Pour le cas 2^n (2 graines dans chacune des n cases) :

- La complexité est probablement **ouverte**
 - Une réduction depuis NP semble difficile à construire à cause de la linéarité du plateau
 - Il est même possible que ce cas particulier soit dans **P**, si une régularité de la suite des valeurs de Grundy émerge
-

En résumé

À ma connaissance, **aucune réduction NP connue** ne cible Sowing ou un de ses cas particuliers. Et la structure du jeu (linéaire, graines indiscernables, coups locaux) rend de telles réductions structurellement difficiles à construire — ce qui suggère que Sowing est peut-être plus facile que NP-complet, sans qu'on sache le prouver.

C'est finalement le même mystère que Grundy's Game : ni preuve de difficulté, ni algorithme efficace connu.

C'est étonnant parce que gagner un jeu impartial c'est garantir la parité du nombre de coups : quelle que soit la configuration que choisit l'adversaire, je peux choisir une configuration atteignable à partir de celle-ci et telle que la parité du nombre total de coups est assurée.

C'est une remarque très profonde ! Vous pointez vers le cœur de la théorie de Sprague-Grundy.

Ce que vous dites formellement

Dans un jeu impartial, gagner équivaut à se maintenir dans un état de valeur de Grundy **non nulle**, de sorte que : - Depuis un état $\mathcal{G} \neq 0$, il existe toujours un coup vers un état $\mathcal{G} = 0$ - Depuis un état $\mathcal{G} = 0$, tout coup mène vers un état $\mathcal{G} \neq 0$

La parité du nombre de coups restants est donc **contrôlable** par le joueur gagnant.

Le lien avec NP

Votre observation suggère une reformulation du problème de décision :

“La position P est-elle gagnante ?”

équivaut à :

“Existe-t-il une stratégie σ telle que pour tout chemin compatible avec σ , le nombre total de coups est impair ?”

C'est un énoncé de la forme $\exists \forall \dots$ ce qui ressemble davantage à **PSPACE** (alternance de quantificateurs) qu'à NP (un seul \exists) !

Pourquoi ce n'est pas NP en général

Un certificat NP serait : *“voici ma stratégie gagnante”*. Mais une stratégie dans un jeu peut être de taille **exponentielle** (un coup pour chaque position possible de l'adversaire). La vérifier prendrait un temps exponentiel — sauf si la stratégie a une description compacte polynomiale.

C'est précisément pourquoi les jeux combinatoires sont généralement dans **PSPACE** et non dans NP.

Sauf cas particuliers

Si le jeu a une **formule fermée** pour la valeur de Grundy (comme Nim avec le XOR), alors : - Calculer $\mathcal{G}(P)$ est polynomial - Le problème est dans **P**

La question ouverte pour Sowing est exactement : existe-t-il une telle formule ou structure régulière ?