Révisions olympiades de mathématiques
olympiade-1re-generale

A. Envoi n^{o}1:

- date de l'envoi de l'énoncé :
  Samedi 9 Novembre 2019 à 1 :00
- date de l'envoi de la correction :
  Ven 15 Nov 2019 à 17 :00

Exercice 1

On part d'un entier n strictement positif :

- Si n est pair, on le transforme en $\dfrac{n}{2}$
- Si n est impair $(n>1)$, on le transforme en $3n+1$.
- Si $n=1$, on s'arrête.

Exemples :

- Si $n=6$, on obtient la suite :
  $6 \longmapsto 3 \longmapsto 10 \longmapsto 5 \longmapsto 16 \longmapsto 8 \longmapsto 4 \longmapsto 2 \longmapsto 1$
- Si $n=13$, on obtient la suite :
  $13 \mapsto 40 \mapsto 20 \mapsto 10 \mapsto 5 \mapsto 16 \mapsto 8 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1$

Il a été observé à l'aide d'un programme sur ordinateur, que pour chaque nombre entier testé, la suite aboutit toujours à 1. Mais ce résultat n'a pas été démontré à ce jour.

On peut par ailleurs, s'intéresser à la longueur de cette suite, qu'on notera $L(n)$.
Par exemple : $L(6)=9$ et $L(13)=10$.

1. Déterminer $L(n)$ pour les entiers allant de 1 à 12.
2. Soit p un entier, on considère l'entier $n=2^p$.
   Exprimer $L(n)$ en fonction de p.
3. Trouver un nombre entier n compris entre 2^{2008} et 2^{2009} tel que :
   $L(n)=2012$.
   Indication : On pourra chercher un nombre de la forme $2^p \times q$.
4. Soit k un entier non nul.
   a. Montrer que : $L(8k+4)=L(6k+4)+3$.
   b. De même, montrer que : $L(8k+5)=L(6k+4)+3$.
   c. Montrer que : $L(16k+2)=L(16k+3)$

Accéder à la correction

B. Envoi n^{o}2:

- date de l'envoi de l'énoncé :
  Samedi 16 Novembre 2019 à 1 :00
- date de l'envoi de la correction :
  Ven 22 Nov 2019 à 17 :00

Exercice 1

Une calculatrice défectueuse permet seulement :

- de taper des nombres positifs ou nuls ;
- de faire l'opération suivante : à partir de trois nombres entrés successivement $(x\,;y\,;z)$, elle affiche 0 si $x=y$ et le résultat de $\dfrac{z}{x-y}$ sinon.

$$(x\,;y\,;z) \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{z}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x=y \end{cases}$$

- l'utilisation des parenthèses qui permet de composer des calculs.

1. En détaillant les calculs, vérifier les résultats suivants donnés par la calculatrice :
   $(0\,;1\,;2) \longmapsto -2$; $\big((2\,;0\,;1)\,;1\,;1\big) \longmapsto -2$
2. Que donne $(2\,;0\,;1)$, $(0\,;2\,;1)$ et $\big(2\,;1\,;\,(2\,;1\,;2)\big)$?
3. Donner un calcul permettant d'obtenir -1.
4. Vérifier que le calcul $(a\,;0\,;1)$ permet d'obtenir l'inverse de a pour tout $a>0$.
5. Proposer un calcul permettant de faire la division de deux nombres positifs : $\dfrac{a}{b}$ avec $a \geqslant 0$ et $b>0$.
6. Proposer un calcul permettant de faire la multiplication de deux nombres positifs : $a \times b$ avec $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$.

Accéder à la correction

C. Envoi n^{o}3:

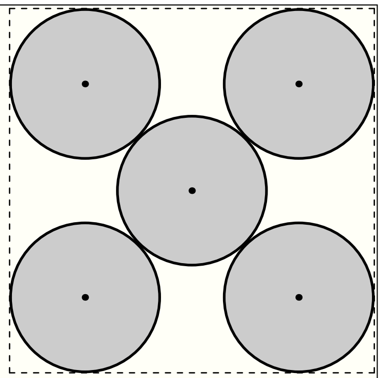
- date de l'envoi de l'énoncé :
  Samedi 23 Novembre 2019 à 1 :00
- date de l'envoi de la correction :
  Ven 29 Nov 2019 à 17 :00

Exercice 1

Cinq cercles de rayon $1\,cm$ ont été placés dans un carré comme l'indique le dessin.

Les cercles sont tangents entre eux et tangents aux côtés du carré.

Déterminer la longueur d'un côté du carré.



Accéder à la correction

D. Envoi n^{o}4:

- date de l'envoi de l'énoncé :
  Samedi 30 Novembre 2019 à 1 :00
- date de l'envoi de la correction :

Ven 6 Dec 2019 à 17 :00

Exercice 1

1. L, S et V étant trois nombres réels positifs, montrer que les triplets $(a\,;b\,;c)$ solutions du système :
$$\left\{\begin{aligned} a+b+c &= L\\ ab+ac+bc &= S\\ abc &= V\end{aligned}\right.$$
sont tels que a, b et c sont les solutions de l'équation :
$X^3 - L{\cdot}X^2 + S{\cdot}X - V = 0$
2. Déterminer les dimensions d'un pavé droit dont la somme des longueurs de toutes ses arêtes est de $20\,cm$, la somme des aires des six faces est de $14\,cm^2$ et dont le volume est de $3\,cm^3$.
3. Quels sont les volumes minimum et maximum d'un pavé droit dont la somme des longueurs de toutes les arêtes est de $20\,cm$, la somme des aires des six faces est de $14\,cm^2$.

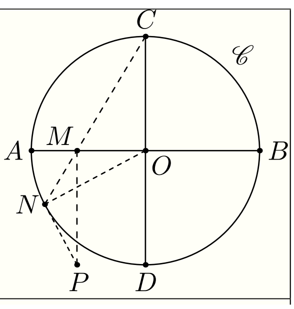
Accéder à la correction ➡

E. Envoi n^{o}5 :

- date de l'envoi de l'énoncé :
  Samedi 7 Décembre 2019 à 1 :00
- date de l'envoi de la correction :
  Ven 13 Dec 2019 à 17 :00

Exercice 1

On donne un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et deux diamètres perpendiculaires $[AB]$ et $[CD]$. M étant un point du segment $[AB]$, on trace (CM) qui recoupe le cercle en N. La tangente en N au cercle et la perpendiculaire en M à (AB) se coupent en P. Montrer que :
$OP = CM$.



Accéder à la correction ➡

F. Envoi n^{o}6 :

- date de l'envoi de l'énoncé :
  Samedi 14 Décembre 2019 à 1 :00
- date de l'envoi de la correction :
  Ven 20 Dec 2019 à 17 :00

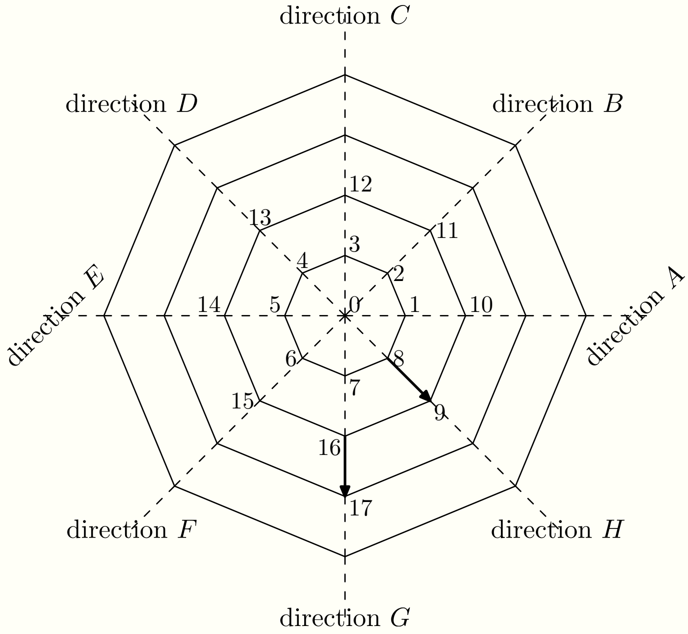
Exercice 1

On considère des octogones réguliers, de même centre O.
Aux sommets de l'octogone central, on note les huits premiers entiers non nuls.
Sur les sommets du deuxième octogone, on inscrit les 8 premiers nombres entiers suivants, avec une rotation de 45 degrés autour du point O.
Et ainsi de suite...

On dit que chaque nombre entier a une direction *(A, B, C, D, E, F, G ou H par rapport à l'origine O).*

Par exemple, 1 a pour direction A, 2 a pour direction B...

Voici une figure représentant les quatre premiers octogones :



1. Quel sera le premier entier inscrit sur le quatrième octogone ? Préciser sa direction.
2. Déterminer le premier entier inscrit sur le huitième octogone. Préciser sa direction.

Accéder à la correction ➡

G. Envoi n^{o}7 :

- date de l'envoi de l'énoncé :
  Samedi 21 Décembre 2019 à 1 :00
- date de l'envoi de la correction :
  Ven 27 Dec 2019 à 17 :00

Exercice 1

Un entier naturel non nul est un nombre Harshad s'il est divisible par la somme de ses chiffres.
Par exemple, n=24 est un nombre Harshad car la somme de ses chiffres est 2+4=6, et 24 est bien divisible par 6.

1. a. Montrer que 364 est un nombre de Harshad.
   b. Quel est le plus petit entier qui ne soit pas un nombre Harshad ?
2. a. Donner un nombre Harshad de 4 chiffres.
   b. Soit n un entier non nul. Donner un nombre Harshad de n chiffres.

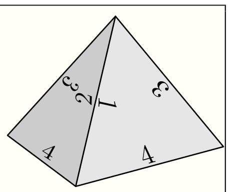
Accéder à la correction ➡

H. Envoi n^{o}8 :

- date de l'envoi de l'énoncé :
  Samedi 28 Décembre 2019 à 1 :00
- date de l'envoi de la correction :
  Ven 3 Jan 2020 à 17 :00

Exercice 1

Un dé tétraèdrique comporte quatre faces comme le dé représenté ci-contre. Lorsqu'on jette un tel dé, le résultat est le nombre inscrit au plus près de la base tétraèdre. Dans notre exemple, le dé tétraédrique est tombé sur la face 4.



Antoine, Baptiste, Cyril et Diane jouent avec quatre dés tétraédriques réguliers et équilibrés mais qui ne sont pas numérotés de façon habituelle. Ainsi, le dé d'Antoine compte quatre faces numérotées 1, 6, 6 et 6. Avec ce dé, le nombre 1 est obtenu avec la probabilité $\frac{1}{4}$ et le nombre 6 avec la probabilité $\frac{3}{4}$.

- Le dé de Baptiste est numéroté 4, 4, 5 et 5 ;
- celui de Cyril 3, 3, 3 et 8 ;
- et enfin, celui de dianne 2, 2, 7 et 7.

1. Chaque joueur jette ce dé tétraédrique une fois. Qui a le plus de chances d'obtenir un nombre supérieur ou égal à 6?

2. Les joueurs commencent une série de duels : Antoine joue contre Baptiste, Baptiste joue contre Cyril, Cyril joue contre Diane, Diane joue contre Antoine. Le gagnant de chaque duel est le joueur qui a obtenu le résultat le plus élevé.

   a. Montrer que dans le premier duel Antoine gagne contre Baptiste avec une probabilité de $\frac{3}{4}$.

   b. Donner les probabilités de gain des joueurs dans les trois autres duels.

3. Antoine, Baptiste, Cyril et Diane jettent simultanément leur dé. Celui des quatre joueurs qui obtient le plus grand nombre gagne.

   a. Montrer que la probabilité que Baptiste gagne est égale à $\frac{3}{32}$.

   b. Qui a le plus de chances de gagner ce jeu?

Accéder à la correction

I. Envoi n^{o}9 :

- date de l'envoi de l'énoncé :
  Samedi 4 Janvier 2020 à 1 :00
- date de l'envoi de la correction :
  Ven 10 Jan 2020 à 17 :00

Exercice 1

Echanges thermiques

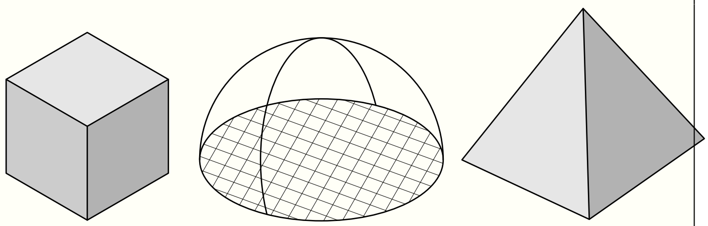
En architecture, on appelle facteur de compacité d'un bâtiment le rapport de la surface extérieure - y compris la base en contact avec le sol - de ce bâtiment, mesurée en m^2, à son volume, mesuré en m^3. Le facteur de compacité $c=\frac{S}{v}$, exprimé en m^{-1}, donne une première évaluation grossière des performances thermiques d'une construction d'habitation.

1. Calculs de compacité pour quelques volumes usuels, dessinés ci-dessous.

   a. Déterminer le facteur de compacité du cube de côté a.

   b. Déterminer celui d'une demi-sphère de rayon r. On rappelle que le volume d'une sphère de rayon r est $\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3$ et que sa surface a pour aire $4\cdot\pi\cdot r^2$.

   c. Déterminer celui d'une pyramide régulière à base carré de côté a, et de hauteur verticale a.



   d. En quoi, d'après vous, le facteur de compacité est lié aux performances thermiques d'un bâtiment?

2. On se propose d'étudier le facteur de compacité d'un pavé droit de volume 1 dont les dimensions sont x, y et z.

   a. Vérifier que pour tous nombres a, b et c :

$$a^3+b^3+c^3-3\cdot a\cdot b\cdot c=\frac{1}{2}\cdot(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$$

   b. En déduire que pour tous nombres réels positifs a, b et c :
   $a^3+b^3+c^3\geqslant 3\cdot a\cdot b\cdot c$

   c. En déduire que pour tous nombres réels positifs A, B et C dont le produit est égal à 1 : $A+B+C\geqslant 3$

   d. Montrer que le facteur de compacité de ce pavé est :
   $c=2\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$

Accéder à la correction

J. Envoi n^{o}10 :

- date de l'envoi de l'énoncé :
  Samedi 11 Janvier 2020 à 1 :00
- date de l'envoi de la correction :
  Ven 17 Jan 2020 à 17 :00

Exercice 1

Liber abaci

Il y a 4 000 ans, les anciens égyptiens utilisaient en calcul une propriété arithmétique bien étonnante : tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$ strictement positif s'écrit comme une somme de fractions unitaires, c'est-à-dire d'inverses d'entiers positifs, tous différents les uns des autres. Depuis lors, une telle décomposition s'appelle une "écriture égyptienne". Ainsi, la somme $\frac{1}{6}+\frac{1}{17}+\frac{1}{102}$ est-elle une "écriture égyptienne" du quotient $\frac{4}{17}$, tandis que les sommes $\frac{1}{17}+\frac{1}{17}+\frac{1}{17}+\frac{1}{17}$ et $\frac{1}{17}+\frac{3}{17}$ n'en sont pas. Plusieurs questions sur ces écritures *demeurent, aujourd'hui encore, ouvertes.*

1. Pourquoi les deux dernières décompositions données en préambule ne sont-elles pas des "*écriture égyptiennes*"? Proposer une écriture égyptienne de $\frac{2}{3}$ comportant deux fractions unitaires, puis une autre de $\frac{2}{3}$ en comportant trois.

2. **Un algorithme**

Soient p et q deux entiers tels que $0<p<q$. Le quotient $\frac{p}{q}$ est donc un élément de $]0\,;1]$.

```
k ← 1
p₁ ← p
q₁ ← q.
Tant que pₖ≠0
    Déterminer le plus petit entier positif nₖ
        tel que :   1/nₖ ⩽ pₖ/qₖ.
          Ainsi :   1/nₖ ⩽ pₖ/qₖ < 1/(nₖ−1)
    pₖ₊₁ ← pₖ·nₖ − qₖ
    qₖ₊₁ ← qₖ·nₖ
          Ainsi :   pₖ₊₁/qₖ₊₁ = pₖ/qₖ − 1/nₖ
    Incrémenter k
          c'est-à-dire augmenter la valeur du
          compteur k d'une unité.
Fin du Tant que
```

a. On fait ici tourner l'algorithme sur le quotient $\frac{p}{q}=\frac{1}{4}$. Au début du premier tour de boucle :
$k=1$; $p_1=4$; $q_1=17$.
On déterminer alors $n_1=5$. Puis $p_2=3$, $q_2=85$ et k vaut 2 avant d'entrer dans le deuxième tour de boucle. Poursuivre jusqu'à l'arrêt complet.
Que vaut $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}$?
Les quatre fractions unitaires sont-elles distinctes?

b. On suppose que l'algorithme prend fin à l'issue du $N^{\text{ème}}$ tour de boucle. Justifier qu'il permet de donner une "*écriture égyptienne*" du quotient $\frac{p}{q}$.

c. Justifier clairement que l'algorithme ne peut être illimité.

Cet algorithme permet donc de donner une "*écriture égyptienne*" de n'importe quel nombre rationnel élément de $]0\,;1[$. Il appartient à une classe d'algorithmes dits "*gloutons*" et est attribué à Léonard de Pise, auteur du *Liber abaci (1202)*.

L'adjectif "glouton" s'applique à des algorithmes faisant, à chaque étape, un choix optimal. L'optimalité globale n'est pas nécessairement atteinte comme en témoignent les deux décompositions de $\frac{4}{17}$ rencontrées dans ce problème.

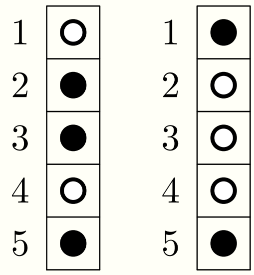
Accéder à la correction ➡

K. Envoi n°11 :

- date de l'envoi de l'énoncé :
  Samedi 18 Janvier 2020 à 1 :00
- date de l'envoi de la correction :
  Ven 24 Jan 2020 à 17 :00

Exercice 1

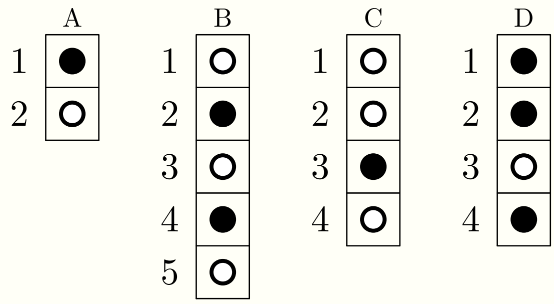
On dispose de n pions verticalement. Ils sont noirs sur une face, blancs sur l'autre, et sont numérotés de 1 à n. Au début du jeu, chaque pion présente aléatoirement sa face noire ou sa face blanche. **A chaque coups - qu'on appelle une *opération* dans toute la suite - on retourne un des pions et tous ses voisins du dessus.**



Le dessin ci-contre donne l'exemple du changement qu'apporte à une configuration initiale une opération avec le troisième jeton.

L'objectif du jeu est de trouver une séquence d'opérations telle que tous les pions montrent leur face blanche.

1. L'ordre dans lequel se succèdent deux opérations a-t-il de l'importance?
2. Quel est l'effet combiné de deux opérations identiques?
3. Indiquer les numéros des pions à retourner pour ne voir que des faces blanches, dans les situations représentées ci-dessous.



4. On donne l'algorithme suivant, pour une configuration de n cases :

> Pour k allant de n à 1 par pas de -1
>
> Si le jeton k est noir, effectuer une opération avec ce jeton
>
> Fin Pour

a. Expliquer pourquoi cet algorithme blanchit la colonne en un minimum d'opérations. Combien d'opérations met-il au maximum en oeuvre?

b. Donner un exemple de configuration de n cases nécessitant n opérations.

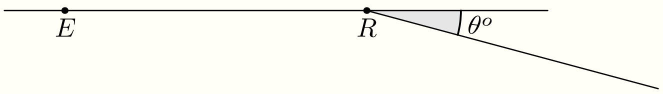
Accéder à la correction ➡

L. Envoi n°12 :

- date de l'envoi de l'énoncé :
  Samedi 25 Janvier 2020 à 1 :00
- date de l'envoi de la correction :
  Ven 31 Jan 2020 à 17 :00

Exercice 1

Pierre et sa fille Eloïse se promènent sur une route horizontale. En un point R, cette route descend faisant un angle θ de 5^o avec l'horizontal *(voir figure)*

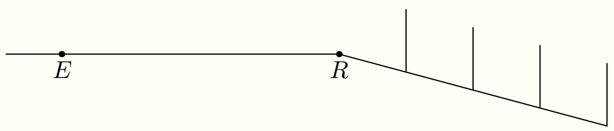


Eloïse, dont les yeux sont à 1,6 mètre du sol, s'arrête en un point E, à 24 mètres du point R.

Son père continuant à marcher, passe devant le point R puis s'engage dans la partie en pente de la route.

1. Quand il se trouve à 86 mètres de R, il disparaît des yeux de sa fille.
Déterminer la hauteur de Pierre.

2. Dans la partie en pente de la route, des poteaux d'une hauteur de 6,5 mètres sont plantés verticalement tous les 28 mètres, comme sur le schéma ci-dessous



Le pied du premier poteau se situe à 28 mètres du point R.
On admet l'hypothèse que les poteaux ne peuvent se masquer les uns des autres.

Combien Eloïse peut-elle voir de poteaux de l'endroit où elle se trouve?

3. Quelle est, en réalité, la mesure de l'angle θ, sachant qu'Eloïse ne voit que 5 poteaux?
On pourra utiliser la formule : $1+\left(\tan\theta\right)^2 = \dfrac{1}{\left(\cos\theta\right)^2}$
On donnera une valeur approchée de θ à 10^{-3} près.

Accéder à la correction

M. Envoi n^{o}13 :

- date de l'envoi de l'énoncé :
  Samedi 1 Février 2020 à 1 :00
- date de l'envoi de la correction :
  Ven 7 Fév 2020 à 17 :00

Exercice 1

Trois entiers naturels distincts a, b, c **rangés par ordre strictement croissant**, $a<b<c$, sont en progression arithmétique si : $c-b=b-a$

On dit alors que $(a\,;b\,;c)$ est un triplet arithmétique.

1. Compléter les triplets arithmétiques suivants :

   a. $(57\,;101\,;\dots)$ b. $(57\,;\dots\,;101)$

   c. $(\dots\,;57\,;101)$

2. a. Peut-on trouver un triplet arithmétique $(a\,;b\,;c)$ dont la somme vaut 2012?

   b. Combien y a-t-il de triplets arithmétiques $(a\,;b\,;c)$ de somme 2013?

3. On prend au hasard trois nombres entiers a, b, c dans 1, 2, 3, ..., 10 avec $a<b<c$. Quelle est la probabilité que $(a\,;b\,;c)$ soit un triplet arithmétique?

4. On rappelle qu'un entier naturel p est **premier** si $p\geqslant 2$ et si ses seuls diviseurs positifs sont 1 et p.

   a. Quels sont les cinq plus petits entiers premiers?

   b. Donner un triplet arithmétique $(a\,;b\,;c)$ constitué d'entiers premiers. Ce triplet est-il celui pour lequel la somme $a+b+c$ est minimale? On demande de justifier la réponse. Sinon, trouver les trois entiers premiers $a<b<c$ en progression arithmétique et de somme minimale.

   c. Peut-on trouver un triplet arithmétique $(a\,;b\,;c)$ constitué uniquement d'entiers premiers et dont la somme $a+b+c$ vaut 366?

5. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On se donne une liste $[a_1,a_2,\dots,a_n]$, d'entiers rangés par ordre strictement croissant. On veut savoir si trois de ses termes consécutifs forment un triplet arithmétique.

   a. **Dans cette question uniquement**, la liste est $[1,3,6,10,15,21,27,32,39,45]$. Contient-elle un triplet arithmétique formé de trois termes consécutifs?

   b. On revient au cas général d'une liste $[a_1,a_2,\dots,a_n]$, d'entiers rangés par ordre strictement croissant. Ecrire un algorithme qui affiche, s'il existe, le premier triplet arithmétique formé de trois termes consécutifs.

   c. Avec la calculatrice, programmer puis tester cet algorithme sur la liste $[a_1,a_2,\dots,a_{20}]$ où, pour $1\leqslant k\leqslant 20$:
   $a_k = -k^3+36k^2+9k$
   On ne demande pas de vérifier que cette liste est formée d'entiers naturels rangés par ordre strictement croissant.

Accéder à la correction