

Exercice sur les Nombres Complexes

Énoncé

Soit A , B et C trois points d'affixes respectives :

$$z_A = 9 + 2i, \quad z_B = 3 - i, \quad z_C = -1 - 3i.$$

1. Déterminer la forme algébrique de $k = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.
2. En déduire un argument de k .
3. Que peut-on en déduire ?

Correction

1. **Forme algébrique de k**

$$z_C - z_A = (-1 - 3i) - (9 + 2i) = -10 - 5i.$$

$$z_B - z_A = (3 - i) - (9 + 2i) = -6 - 3i.$$

$$k = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-10 - 5i}{-6 - 3i}.$$

On multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué de $-6 - 3i$:

$$k = \frac{(-10 - 5i)(-6 + 3i)}{(-6 - 3i)(-6 + 3i)}.$$

$$(-6 - 3i)(-6 + 3i) = 36 - (-9i^2) = 36 + 9 = 45.$$

$$\begin{aligned} (-10 - 5i)(-6 + 3i) &= (-10)(-6) + (-10)(3i) + (-5i)(-6) + (-5i)(3i). \\ &= 60 - 30i + 30i - 15i^2 = 60 - 15(-1) = 60 + 15 = 75. \end{aligned}$$

Donc :

$$k = \frac{75}{45} = \frac{5}{3}.$$

2. **Argument de k**

Comme $k = \frac{5}{3}$ est un nombre réel strictement positif, son argument est :

$$\text{Arg}(k) = 0.$$

3. **Interprétation**

La valeur de k montre que les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires, ce qui signifie que les points A , B et C sont alignés.