

# Préface

La mathématique, qu'est-ce que c'est? C'est sans doute une question qui vous intéresse, puisque vous avez ouvert ce livre. Mais peut-être serez-vous surpris par la réponse que Jean-Louis Krivine nous propose, dès son introduction :

*La mathématique est l'art d'écrire des textes qui ne peuvent, en aucun cas, introduire d'erreur dans l'exécution d'un programme.*

Pour bien des mathématiciens, il s'agit là d'un changement de point de vue renversant : où sont donc le calcul et la géométrie de notre enfance, la conviction cartésienne d'établir au moyen de démonstrations rigoureuses d'incontestables vérités, les structures mathématiques omniprésentes? Nous voyons déjà sur cet exemple que ce livre remue-méninges, petit par la taille mais au contenu formidable, invite le lecteur au questionnement en lui donnant, simplement et inlassablement, des idées.

Soyez prévenus : dans cet ouvrage innovant, rien ne se passe comme on pourrait s'y attendre. Bien des sujets sont abordés, qui vont de la logique mathématique aux paradoxes de la mécanique quantique et au fonctionnement du cerveau des mammifères et des oiseaux, sans oublier bien sûr le concept polymorphe de programme, que Jean-Louis Krivine place au centre de son propos.

Il ne faut pas se contenter de lire ce livre : il faut le relire, prendre le temps et l'énergie nécessaires pour en percevoir toute la richesse. Le lecteur pensera peut-être que certaines idées sont discutables : eh bien pourquoi pas, puisque c'est clairement le souhait de l'auteur qu'elles soient discutées.

Car Jean-Louis Krivine n'est pas un professeur dogmatique, qui veillerait du haut de sa chaire à dispenser ses connaissances avec le langage convenu des publications scientifiques.

Qui suis-je pour parler de ce mathématicien de premier ordre? L'étudiant qui a appris les éléments de la théorie des ensembles dans son ouvrage des Presses Universitaires de France, déjà réédité en 1972? Le jeune chercheur à qui il a fait comprendre l'usage des ultrapuissances ou de la stabilité en géométrie des espaces de Banach? Ou le collègue plus mûr auquel il a expliqué la place du théorème d'incomplétude de Gödel en théorie de la démonstration? Peu importe, nous sommes nombreux à avoir bénéficié des connaissances encyclopédiques de Jean-Louis Krivine, mises au service d'une démarche toujours originale. Depuis une quarantaine d'années, ses réflexions se sont portées sur les interactions entre la logique mathématique, dont il a été l'un des précurseurs en France, et l'informatique théorique - ainsi que pratique puisqu'il se soucie sans cesse de la réalisation et de l'utilité de ses idées.

Le livre que vous tenez en main est le produit de sa pensée, exposé avec aussi peu de technique qu'il est possible, pour toucher le public le plus large. Il demeure que la lecture en est exigeante, pour la simple raison que Jean-Louis Krivine rapproche des domaines qu'on

aurait pu croire étrangers, exhibe des connections qu'on n'avait pas aperçues. Ils sont bien peu nombreux qui savent ainsi développer une recherche féconde aux interfaces, et moins nombreux encore sont ceux qui font ensuite l'effort d'expliquer leurs idées sans jargon ni formules. Ce livre est donc précieux. Et la diversité de son contenu illustre très heureusement l'unité de la science, en notre temps de spécialisation extrême.

Evariste Galois a écrit, dans ses *Discussions sur les progrès de l'analyse pure* :

*Ici comme dans toutes les sciences, chaque époque a eu en quelque sorte ses questions du moment : il y a des questions vivantes qui fixent à la fois les esprits les plus éclairés, comme malgré eux et sans qu'aucun accord n'ait présidé à ce concours.*

Cette considération nous invite à décider quelles sont les questions vivantes en ce début de vingt-et-unième siècle. On peut penser que la révolution informatique en constitue la source principale, qu'il s'agisse de problèmes proprement scientifiques ou de l'impact social du progrès technique. Jean-Louis Krivine s'est donc naturellement fixé sur les interactions entre les mathématiques et la logique, ses disciplines de prédilection, et l'informatique.

L'histoire de cette interface, évoquée dans ce livre, est en fait plus ancienne que l'informatique elle-même ! Elle commence en effet avec les travaux de Moses Schönfinkel à Göttingen dans les années 1920 sur la logique combinatoire, qui du point de vue moderne est un langage machine, puis se prolonge avec la correspondance de Curry-Howard et enfin les travaux de Timothy Griffin en 1988 qui permettent d'intégrer au langage machine le tiers-exclu et par conséquent le raisonnement par l'absurde.

Nous savons donc maintenant comment associer un programme en langage machine à chaque preuve mathématique, dès lors qu'elle est formalisée.

Plus précisément, la correspondance de Curry-Howard est une correspondance entre preuves mathématiques et programmes sources, et la formalisation de ces preuves permet de les transformer en langage machine. Ce travail de formalisation a été rendu possible par les travaux des logiciens du vingtième siècle. En particulier, le théorème de complétude de Gödel établit que la courte liste des règles de démonstration (comme par exemple le modus ponens) et une syntaxe très simple suffisent à formaliser tous les raisonnements mathématiques présents et à venir. Nous allons voir pourquoi c'est important.

Depuis quelques années, l'intelligence artificielle (IA) a envahi notre quotidien, et son impact social fascine autant qu'il effraie nos sociétés : qui donc va conserver son emploi dès lors qu'une machine fera plus vite et mieux, pour un coût dérisoire ? C'est un questionnement légitime, tout comme il est légitime d'avancer que la terminologie « IA » n'est pas la bonne, puisqu'elle emploie un mot sorti de son contexte initial et mal défini : intelligence.

En tout cas, ce mot ne figure pas dans le livre que vous tenez en main, sinon bien sûr dans cette préface ! Jean-Louis Krivine évite donc l'emploi de ce terme redoutable, mais il se préoccupe grandement de la façon dont nos cerveaux fonctionnent. Après avoir décrit un programme comme la synergie de trois éléments (un texte, un environnement, une double échelle de temps) et donné divers exemples tirés de notre quotidien - cuisine, musique - ou de la science moderne - l'ADN -, Jean-Louis Krivine écrit :

*Un dernier exemple, qui semble ne pas en être un, car nous ne connaissons aucun des trois éléments caractéristiques : ni son texte, ni son environnement, ni ses échelles de temps. Il s'agit des programmes qui sont exécutés par le cerveau d'un animal évolué (mammifère ou oiseau). En fin de compte, c'est notre centre d'intérêt dans ce livre. Pour une raison qui apparaîtra clairement dans la suite, nous nous « limiterons » au cas qui semble le plus inaccessible, à savoir*

*le cerveau humain.*

En effet, on peut penser que la complexité de notre cerveau le rend particulièrement difficile à analyser, d'autant plus qu'il nous confronte à la redoutable injonction socratique : connais-toi toi-même!

Mais d'un autre côté, nous sommes les seuls êtres vivants connus à ce jour à faire des mathématiques, et Jean-Louis Krivine explique que les mathématiques sont un langage source pour les programmes écrits en langage machine dans notre cerveau.

Ecrits comment, par quoi ou par qui, et pourquoi?

Quelques mots, d'abord, sur le comment. S'il y a écriture, il faut qu'il y ait alphabet et qu'il y ait langage, et ceux-ci doivent être les plus simples possibles. Tentons de les modéliser, et pour cela rappelons les travaux d'un grand précurseur.

Gottfried Leibniz a présenté dès 1703 à l'Académie des Sciences de Paris son mémoire : *Explication de l'arithmétique binaire* qui se sert des seuls caractères 0 et 1 avec des remarques sur son utilité et sur ce qu'elle donne le sens des anciennes figures chinoises de Fohy.

Leibniz est sans doute le premier à avoir conçu l'idée radicale qu'avec deux symboles, on pouvait tout coder. En son temps, cette considération ne pouvait être que théorique même si Leibniz lui aussi se préoccupait toujours de la réalisation pratique de ses idées.

Mais grâce à l'analyse de Fourier, nous sommes maintenant capables de traduire en suites de 0 et de 1 toutes les images et tous les sons, de stocker ces données et de les transmettre à satiété sur la Toile. Cependant, la mathématisation des sens à courte portée reste un défi à relever, et le codage du goût du chocolat, du parfum de l'eau de Cologne de notre enfance ou d'une caresse sur la joue nous échappe encore.

Pour conjurer la présence des paradoxes, Leibniz a également réfléchi à l'invention d'un langage formel, sa caractéristique universelle ainsi faite que *les chimères, que celui même qui les avance n'entend pas, ne pourront pas être écrites en ces caractères.*

Mais le temps, et sans doute aussi la compréhension de ses contemporains, a manqué à Leibniz pour mettre au point sa caractéristique, et Jean-Louis Krivine propose comme langage la logique combinatoire de Schönfinkel, revue et augmentée par Curry puis Griffin. Il conviendrait d'ajouter à cette courte liste son propre nom, puisque Krivine a publié en 2021 l'article *A program for the full axiom of choice* qui établit la possibilité d'exprimer en langage machine l'axiome du choix complet.

Le pourquoi, à présent : si des programmes sont exécutés par le cerveau des animaux évolués, c'est que cela facilite leur survie et leur reproduction.

Ces animaux, comme nous-mêmes, vivent dans l'univers de leurs perceptions, leurs sens (ou périphériques) font l'interface avec leur environnement et les programmes leur permettent d'identifier par exemple une menace ou un partenaire potentiel. Mais qui donc a écrit ces programmes? L'évolution darwinienne a mis trois milliards d'années à effectuer cette compilation vertigineuse, cette évolution que Jean-Louis Krivine appelle avec un peu d'ironie la Programmeuse.

*Ces programmes n'ont pas vocation à être compris mais simplement exécutés par leur hôte. Seule l'espèce humaine, nous explique-t-il, a entrepris, au moyen de l'introspection, la tâche a priori impossible de leur décompilation. C'est le travail infatigable des mathématiciens, qui s'est poursuivi lentement pendant des millénaires.*

Si l'on en croit son titre, ce livre est dédié à ces décompilateurs obstinés.

Que font-ils, ces mathématiciens décompilateurs? Le jeu mathématique, dont Jean-Louis Krivine reconnaît le caractère addictif, consiste à manipuler des structures finies, qui ne sont pas des formules mathématiques comme le pensait Hilbert lorsqu'il a formulé son programme de consolidation et de formalisation des mathématiques - lequel a buté sur le théorème d'incomplétude de Gödel - mais des programmes présents dans notre cerveau. Les questions tant discutées de réalité des objets mathématiques ou de vérité se trouvent alors vidées de leur contenu. Jean-Louis Krivine écrit :

*La seule raison d'être des démonstrations mathématiques est tout bêtement de fournir des programmes corrects, indispensables à notre survie et notre reproduction, et pas le moins du monde d'établir on ne sait quelles « vérités universelles », descendues d'on ne sait quel "monde idéal.*

Permettez-moi une incise : une raison d'être secondaire de ces démonstrations est de permettre aux chercheurs en mathématiques de nourrir leur famille. Mais ce n'est pas le propos, revenons à notre sujet : on ne dit pas d'un programme qu'il est vrai ou non, mais qu'il tourne ou pas :

*Si nous programmons en partant de  $2 + 2 = 3$ , l'exécution de notre programme va tourner au désastre. Les programmes à l'œuvre dans notre cerveau sont corrects, car l'évolution et la sélection naturelle y ont veillé impitoyablement et aveuglément.*

Les mathématiciens sont légitimement fiers des découvertes qu'ils ont réalisées en vingt-cinq siècles de recherche, de décodage, de décompilation, autrement dit d'introspection. Cependant, *l'ensemble des programmes qui nous permettent de contrôler nos muscles, ou d'apprendre notre langue, dépasse déjà très largement, en complexité, toutes les théories mathématiques et physiques dont on vient de parler.*

Et le mystère demeure de la présence de ces programmes dans notre cerveau. Sans prétendre le résoudre, évoquons cette fois un grand précurseur du concept d'arborescence. Dans ses Pensées, Blaise Pascal écrit lumineusement :

*Les nombres imitent l'espace, qui sont de nature si différente. Tout est fait et conduit par un même maître. La racine, les branches, les fruits; les principes, les conséquences.*

Le mot maître (sans majuscule!) signifie ici plan, ou patron au sens des couturiers. Ce maître serait-il notre Programmeuse?

Les mathématiques ne sont pas que fondamentales : elles sont utilisées dans toutes les sciences, à commencer par la physique. Galilée a écrit dès 1623 :

*La philosophie est écrite dans ce très vaste livre qui constamment se tient ouvert devant nos yeux - je veux dire l'univers - mais on ne peut le comprendre si d'abord on n'apprend pas à comprendre la langue et à connaître les caractères dans lesquels il est écrit. Or il est écrit en langage mathématique et ses caractères sont les triangles, les cercles et autres figures géométriques, sans lesquels il est absolument impossible d'en comprendre un mot, sans lesquels on erre vraiment dans un labyrinthe obscur.*

Le point de vue de Galilée a donné naissance à la science moderne, qui a totalement bouleversé nos sociétés et nos vies.

Mais depuis le vingtième siècle, la physique a reconnu l'importance de l'observateur, en particulier en mécanique quantique puisque mesurer une quantité - par exemple une vitesse, une position - nécessite d'agir sur l'objet mesuré et donc de le perturber.

La perception par un observateur de l'univers qui l'entoure et les lois qu'il en déduit sont correctes (merci à la Programmeuse), mais Jean-Louis Krivine remarque que cette cohérence a

des limites inévitables. Il illustre son propos avec le « paradoxe » de la mécanique quantique d'Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) sur le principe de localité, dont Alain Aspect a montré en 1982 qu'il n'était pas respecté - découverte qui lui a valu le Prix Nobel de Physique en 2022. L'expérience d'Aspect établit l'existence de deux électrons intriqués situés à une distance macroscopique, d'où résulte une situation que la Programmeuse n'a pas anticipée.

Jean-Louis Krivine revient sur le paradoxe EPR dans son Appendice, où il mentionne un lien inattendu (dû à Boris Tsirelson) avec la constante de Grothendieck et souligne que chacun de deux électrons n'a aucune existence, seul leur couple existe. Il est tentant, à ce propos, de penser aux feuillettes de Riemann : la racine carrée d'un nombre complexe est un couple de nombres complexes, ni plus ni moins. Quoi qu'il en soit, Jean-Louis Krivine formule une recommandation radicale :

*Il faut remettre l'observateur au cœur de l'interprétation des expériences et se décider à abandonner une fois pour toutes la folle chimère d'un Univers régi par des lois mathématiques.*

La Programmeuse n'a pas prévu la façon dont nous allons lire et utiliser le livre de Galilée, ce livre dont les caractères ne sont pas des triangles et des cercles mais des programmes écrits en langage machine.

Le livre que vous tenez en main est concis, et il serait regrettable que sa préface soit interminable. Il est temps à présent de plonger dans le texte lui-même. Peut-on se préparer à être surpris? Quoi qu'en disent les logiciens, je l'espère car c'est ce qui vous attend. Bienvenue dans l'œuvre d'un penseur révolutionnaire, qui marquera son époque.

Paris, Février 2024,

Gilles Godefroy.