

Université Montpellier II

Année universitaire 2012-2013

Mémoire de Master 2 Professionnel
Université Montpellier II, Université Claude Bernard Lyon 1,
Ecole Normale Supérieure-Lettres et Sciences humaines

Spécialité "Didactique, Epistémologie et Histoire des Sciences"

**APPORTS D'UN TRAVAIL PLURIDISCIPLINAIRE SUR DES
TEXTES DE LEWIS CARROLL POUR TRAVAILLER LA
LOGIQUE A LA TRANSITION LYCEE-UNIVERSITE**

Alice Ernoult

Date de soutenance: 26 septembre 2013

Rapporteure : Virginie DELOUSTAL-JORRAND
Membres du jury : Aurélie CHESNAIS (examinatrice)
Jean SALLANTIN (examinateur)

Directrice de mémoire : Viviane DURAND-GUERRIER

Laboratoire de rattachement: Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier,
UMR 5149, équipe ACSIOM.

Remerciements

Je tiens avant tout à remercier Viviane, sans qui ce travail n'aurait pas pu exister. Merci pour m'avoir initiée aux mystères de la logique, pour toutes les discussions que nous avons eues depuis 4 ans, pour tes encouragements et ton soutien.

Je remercie Aurélie Chesnais, Jean Sallantin d'avoir accepté de faire partie du jury et Virginie Deloustal-jorrand d'être rapporteure.

Je remercie aussi tous mes collègues qui ont participé de près ou de loin à ce travail : Laurent Langlade, par qui tout a commencé. Sabine Requier-Ulrich, pour toutes nos discussions sur le merveilleux, les sciences, pour m'avoir aidé à placer l' « œuvre dans son contexte », et pour m'avoir fait connaître la thèse de J.-J. Lecercle. Sylvie Gras, Eric Raynaud et Florence Roux pour m'avoir accueillie dans leurs classes, pour leur confiance et leur enthousiasme. Corinne Girard pour m'avoir fait partager son regard de littéraire.

Je remercie le laboratoire EMMA de m'avoir ouvert ses portes, en particulier, merci à Isabelle Ronzetti pour sa gentillesse.

Je remercie mes proches pour leurs encouragements. Tout particulièrement ma petite sœur, Marie, qui m'a donné son point de vue d'élève et Matthias, pour la patience et la compréhension dont il a fait preuve ces derniers mois.

Sommaire

Remerciements	1
Introduction et problématique.....	4
I- Cadre théorique et méthodologie	7
I-1-motivations pour le choix de la théorie	7
I-2- les trois modèles de milieux et la structuration du milieu expérimental	8
I-2-a) Milieu théorique	8
I-2-b) Milieu expérimental a priori	9
I-2-c) Confrontation à la contingence	10
I-3- Dévolution et contrat de lecture	10
I-4- Questions de recherche	12
II- Analyse épistémologique : éléments pour un milieu théorique.....	13
II-1- L'implication logique : quels obstacles pour les élèves du secondaire ?	13
II-2- Logique et langage dans les textes de Lewis Carroll.....	15
II-2-a) Le travail de Lewis Carroll sur la logique : une place particulière dans l'histoire	16
II-2-b) Le <i>nonsense</i> carrollien et la logique	17
II-2-c) Le lecteur modèle du récit carrollien.....	17
II-3- Analyse de la situation dans une perspective didactique.....	18
II-3-a) Caractéristiques d'un milieu favorable au travail de la logique	18
II-3-b) Méthodologie d'analyse des textes	19
II-3-c) Variables didactiques	20
III- Constitution d'un milieu expérimental : analyse <i>a priori</i>	22
III-1- Pré-expérimentation	22
III-1-(a) Déroulement global	22
III-1-(b) Valeurs des variables didactiques	23
III-1-(c) Observations et conséquences.....	23
III-2- Analyse des textes proposés aux élèves.....	24
III-2-(a) Texte 1 : "Pig and Pepper"	24
III-2-(b) Texte 2 : "A Mad Tea Party"	25
III-2-(c) Texte 3 : « Advice from a Caterpillar »	26
III-2-(d) Texte 4 : « Queen Alice »	26
III-3- Valeurs des variables didactiques et consignes.....	28
III-4- Milieu de référence.....	30
III-5- De la difficulté d'obtenir un milieu pour la validation	31

III-6- Obstacles prévus	32
III-7- Observables	33
IV- Déroulement effectif et analyse <i>a posteriori</i>	33
IV-1- analyse « clinique ».....	33
IV-2- Analyse théorique.....	34
IV-2-(a) Texte 1	34
IV-2-(b) Texte 2.....	35
IV-2-(c) Texte 3	36
IV-2-(d) Texte 4.....	37
IV-2-(e) synthèse des résultats	37
Conclusion.....	38
Bibliographie	40
Liste des annexes	42
Résumé	44

Introduction et problématique

Depuis la rentrée 2011, le lycée dans lequel nous enseignons accueille une Classe Préparatoire aux Etudes Supérieures (CPES). Notre ambition pour cette classe est de préparer des étudiants à leur entrée dans les études supérieures, de préférence des études longues (université, classe préparatoire puis grande école,...). Lorsque nous avons élaboré le projet pédagogique pour cette classe, nous nous sommes posé la question des difficultés rencontrées à la transition entre le secondaire et le supérieur à l'échelle de chaque discipline d'une part, de manière plus globale d'autre part, en prenant explicitement en compte la transdisciplinarité. C'est dans cette perspective que s'inscrit l'étude que nous présentons ici.

Pour l'élaboration du « programme » de mathématiques de la CPES, nous nous sommes appuyée sur le travail du groupe GLU (Groupe liaison Lycée-Université) de l'université de Montpellier 2, ainsi que sur notre propre expérience d'enseignement en classe préparatoire ECE (Economique et Commerciale option Economie) et de celle d'autres collègues de classe préparatoire. L'une des difficultés identifiées à l'entrée dans le supérieur en mathématiques concerne la logique (Dieudonné et al. (2011)), c'est donc l'un des axes que nous avons choisis de travailler avec les étudiants en CPES. Les obstacles rencontrés dans le supérieur en logique ont été mis en évidence et étudiés par des didacticiens des mathématiques (voir par exemple Deloustal-Jorrand (2004), Fabert et Grenier (2011)). Le travail que nous présentons ici concerne en particulier l'implication logique dans son rapport avec l'implication utilisée dans le langage courant. Notons que cet aspect est souligné dans les programmes du lycée entrés en vigueur depuis 2009 (« À l'issue de la seconde, l'élève devra avoir acquis une expérience lui permettant de commencer à distinguer les principes de la logique mathématique de ceux de la logique du langage courant » (programme (2009))).

Notre objectif n'est pas de faire un cours de logique aux élèves, mais de leur proposer une situation leur permettant de questionner les différences entre l'usage habituel de la logique dans le langage courant et la logique mathématique, à tout le moins l'usage de la logique en classe de mathématiques. Comme V. Durand-Guerrier l'a montré (dans Durand-Guerrier (2003) par exemple), la notion d'implication logique est une notion complexe et mérite un travail bien particulier en classe. Selon elle, considérer (comme c'est très souvent le cas en classe) qu'un énoncé conditionnel est, de manière implicite, universellement quantifié constitue un obstacle didactique : « the ordinary use of implication in mathematical classes may generate a didactic obstacle for an acceptable understanding of the role played by conditionals in mathematical reasoning » (Durand-Guerrier (2003), p. 6). Dans la suite de son article, l'auteure propose de retenir les quatre points de vue sur l'implication soulignés par Quine : celle du sens commun (qui ne retient pas le cas de l'antécédent faux), la relation entre proposition (l'implication matérielle), l'implication logiquement valide (et les règles d'inférence associées) et l'implication universellement quantifiée. Elle ajoute qu'il est nécessaire, pour faire le pont entre l'implication matérielle et l'implication universellement quantifiée, de considérer des phrases ouvertes avec une variable libre et pour ce faire de travailler

avec des énoncés contingents¹. Nous montrerons que certains de ces aspects sont présents dans les textes que nous avons choisis et nos expérimentations nous permettront de savoir s'ils ont pu être travaillés par les élèves.

Dans un autre article, V. Durand-Guerrier souligne l'importance de l'articulation entre sémantique et syntaxe d'une part et vérité et validité d'autre part (Durand-Guerrier (2008)). Depuis Aristote, la logique s'est donné pour projet de distinguer la vérité d'une assertion dans une interprétation et la validité logique. Dans son article de 2008, V. Durand-Guerrier souligne que, si la logique des propositions peut être développée comme une théorie axiomatique, reposant sur un contrôle syntaxique, la logique des prédicats, qui fait intervenir des énoncés quantifiés, nécessite elle un point de vue sémantique : « quantified logic as defined by Frege and Russell clearly needs a semantic perspective to take into account interpretation and issues concerning the domain of quantification. » (Durand-Guerrier (2008), p.375). Or, les énoncés quantifiés sont nécessaires à l'utilisation de la logique en mathématiques, le contrôle sémantique des énoncés ne doit donc pas être négligé, mais au contraire être travaillé en même temps que le contrôle syntaxique.

Se pose alors la question de l'articulation entre ces aspects nécessaires pour travailler la logique et la volonté, souvent observée dans les classes, d'utiliser des phrases « de tous les jours », comme « s'il pleut je prendrai mon parapluie » ou « si tu es sage tu auras un dessert ». Plusieurs études ont montré que l'utilisation de phrases quotidiennes est très insuffisante pour travailler la logique et que cela peut même conduire à des obstacles didactiques (voir par exemple Durand-Guerrier (2003) et Deloustal-Jorrand (2004)). Ces phrases ont deux défauts majeurs : d'une part elles ne reflètent pas l'usage de la logique mathématique, d'autre part leur interprétation est en général très dépendante du contexte d'énonciation. Comment peut-on alors travailler la logique mathématique dans son rapport avec celle de l'usage commun (rapport qui a toujours été au cœur de la réflexion des logiciens) ? Nous faisons l'hypothèse que l'utilisation de récits donne un premier élément de réponse à cette question. En effet, comme le soulignent Moulin et al. (2012) en se référant à Tauveron (2004), « la compréhension des implicites d'une histoire repose sur l'engagement du lecteur dans un travail cognitif et culturel [cela] nous amène à l'idée que si les informations manquantes d'une histoire sont liées aux mathématiques, le lecteur doit entamer un travail mathématique pour les comprendre » (Moulin et al. (2012), p.734). Il nous reste à déterminer des récits pour lesquels ces « informations manquantes » seront de nature logique.

Dans la perspective pluridisciplinaire que nous souhaitons développer, nous avons fait l'hypothèse que les textes issus d'œuvres de Lewis Carroll (*Alice's Adventures in Wonderland* et *Through the Looking Glass*) étaient de bons candidats. Lewis Carroll est connu pour ses œuvres de fiction, mais nous ne pouvons ignorer qu'il était aussi professeur de mathématiques à l'université d'Oxford et particulièrement intéressé par les questions de logique. A partir des années 1950, des études de l'œuvre de L. Carroll mettent en lumière le rapport entre son humour et la logique ; la thèse de doctorat de Jean-Jacques Lecercle (Lecercle (1981)) est présentée par J. Gattégno comme un aboutissement de ces études (Gattégno (1990), p. XIV). Dans cette thèse, J.-J. Lecercle souligne le rôle de la logique comme ressort de l'écriture *nonsensique*, tout particulièrement chez Lewis Carroll : « Logique camouflée, logique apparente mais radicalement fautive, anti-logique : l'arsenal que le Nonsense utilise dans sa tentative de subversion de la pensée sous sa forme raisonnée est

¹ « A statement is contingent for a subject at a certain point in time, if the subject is unable to determine the truth-value of this statement, which may have a truth-value or not. » (Durand-Guerrier (2003), p. 30)

impressionnant, et si nous ne savions que Carroll était logicien de profession [...], nous aurions lieu de nous inquiéter. » (Lecerle (1981), p. 151). Ainsi, pour des raisons épistémologiques et culturelles, les textes de Lewis Carroll nous paraissent tout indiqués pour travailler la logique dans son rapport avec le langage courant avec des élèves.

Notre étude se donne pour but d'identifier quels aspects de l'implication logique sont présents dans les textes que nous avons retenus, et d'élaborer un dispositif didactique pour travailler ces éléments avec les élèves.

Notre travail didactique doit pouvoir prendre en compte la spécificité de l'utilisation de textes littéraires dans la classe de mathématiques et notre cadre théorique doit nous permettre d'analyser ce qui, dans l'activité des élèves, relève d'un travail sur la logique. C'est pourquoi nous retenons les notions de contrat et de milieu de la théorie des situations didactiques. La notion de contrat didactique au sens de G. Brousseau (Brousseau (1998)) doit être mise en lien avec celle de contrat de lecture de C. Tauveron (Tauveron (1999)) que nous avons déjà évoquée. En ce qui concerne la notion de milieu, nous utilisons le modèle d'I. Bloch (Bloch (2002, 2005)) comme méthodologie de travail.

Dans une première partie, nous donnons les principaux éléments du cadre théorique que nous nous sommes fixé. Puis notre travail est exposé en trois temps. Dans un premier temps, nous menons une analyse épistémologique afin d'obtenir des outils pour analyser notre situation dans une perspective didactique. Nous présentons ensuite la construction de nos expérimentations en utilisant les résultats de la partie précédente et des remarques issues d'une pré-expérimentation. Enfin, nous donnons et analysons les résultats de nos observations.

I- Cadre théorique et méthodologie

I-1-motivations pour le choix de la théorie

Le caractère local de notre travail, nous amène naturellement à choisir le cadre de la théorie des situations didactiques élaborée par G. Brousseau. Cette théorie se base sur l'hypothèse d'un apprentissage par adaptation comme le rappelle C. Margolinas : « le sujet apprend en s'adaptant (assimilation et accommodation) à un milieu qui est producteur de contradiction et de déséquilibre » (Margolinas (1998), p. 2). Ceci nous paraît tout à fait adapté à l'étude de nos expérimentations : notre principale question est en effet de connaître le potentiel des textes choisis pour questionner les représentations et les connaissances des élèves sur la logique, et plus particulièrement sur l'implication.

La théorie des situations didactiques (Brousseau (1998)) offre un cadre pertinent pour penser et organiser les situations d'apprentissage mathématique. Bien que l'élaboration théorique se soit appuyée principalement sur les mathématiques de la scolarité obligatoire, cette théorie peut être utilisée à tous les niveaux d'enseignement. I. Bloch a retravaillé les notions de situation fondamentale et de milieux pour utiliser la théorie des situations didactiques dans l'étude de situations d'enseignement-apprentissage au niveau du supérieur, pour des notions mathématiques complexes comme l'Analyse ; or la logique est un savoir complexe s'il en est. I. Bloch a montré que les étudiants ne disposaient pas au début du supérieur des outils de validation suffisants pour l'analyse (Bloch (2000)); compte tenu de la quasi absence d'enseignement des concepts de logique dans le secondaire en France, on peut faire l'hypothèse qu'il en est de même pour la logique. En outre, les modèles de milieux présentés dans Bloch (2002) permettent de penser globalement le travail d'articulation entre les études épistémologiques, les analyses didactiques *a priori* et la confrontation à la contingence. Il nous a donc paru pertinent de choisir ce cadre pour organiser notre travail.

« Une situation est caractérisée dans une institution par un ensemble de relations et de rôles réciproques d'un ou de plusieurs sujets (élève, professeur, etc.) avec un milieu, visant la transformation de ce milieu selon un projet. » (Brousseau (2010), p. 2) Lorsque ce projet est de nature didactique, les rapports entre l'institution, le milieu, les sujets, donnent lieu à un *contrat didactique* : « C'est l'ensemble des obligations réciproques et des « sanctions » que chaque partenaire de la *situation didactique* :

- Impose ou croit imposer, explicitement ou implicitement, aux autres
- Et celles qu'on lui impose ou qu'il croit qu'on lui impose,

à propos de la connaissance en cause » (Brousseau (2010), p. 6). L'un des éléments importants du contrat didactique avec la validation est la dévolution : « processus par lequel l'enseignant parvient dans une situation didactique à placer l'élève comme simple actant dans une situation a-didactique » (Brousseau (2010), p. 5). La construction d'une situation pour la logique à partir de récits soulève la

question de la dévolution : comment peut-on permettre aux élèves de prendre la responsabilité de la résolution d'un tel problème ?

Nous retenons pour notre étude, les trois modèles de milieu (épistémologique, expérimental *a priori* et de confrontation à la contingence) tels qu'ils sont présentés dans I. Bloch (2002, 2005) ainsi que la notion de dévolution (Brousseau (1998)) que nous étudierons à la lumière des travaux de C. Tauveron en didactique de la lecture et de la théorie de l'interprétation d'U. Eco.

I-2- les trois modèles de milieux et la structuration du milieu expérimental

Dans Bloch (2002), l'auteure souligne que le concept de milieu dans la théorie des situations didactiques est pluriel : « La théorie des situations définit et utilise la notion de milieu dans des circonstances diverses et pour différents types d'analyses de savoirs et de situations d'enseignement/apprentissage. Pour n'en citer qu'un exemple, la notion de situation fondamentale fait référence à un type de modèle, et la structuration du milieu de l'élève ou du professeur à un autre type de modèle. » (Bloch (2002), p. 1), puis elle annonce l'objet de son cours : « Il s'agit clairement d'une élaboration ayant pour but de classer les éléments théoriques « milieux » de la théorie des situations suivant leur nature (du côté du savoir, du côté de l'expérimentation ou du côté de la contingence) et leur fonctionnalité. » (Bloch (2002), p.2).

Nous présentons dans la suite les principaux éléments caractéristiques des modèles de milieu théorique épistémologique et de milieu expérimental, ainsi que l'organisation de la confrontation à la contingence.

I-2-a) Milieu théorique

« Le schéma de milieu des situations fondamentales est bâti sur la théorie des jeux et son but est, pour un concept donné, de trouver un jeu qui le fasse fonctionner comme connaissance – c'est-à-dire sans que l'on ait besoin de l'explicitier d'abord comme savoir – et qui vise à terme l'institutionnalisation des savoirs relatifs à ce concept. » (Bloch (2005), p. 44). « La question est donc la détermination de milieux et de situations qui théoriquement permettront d'établir un rapport au concept visé. » (Bloch (2005), p. 45).

En suivant cette définition du milieu théorique (ou milieu des situations fondamentales), il nous faut donc mener d'une part, une analyse épistémologique du concept d'implication et déterminer ce qui permet de le faire « fonctionner comme une connaissance », d'autre part, une analyse du type de récits que nous proposons d'utiliser afin de nous assurer de la consistance du rapport entre le savoir visé et la situation que nous étudions. Pour cela nous nous appuyons sur des travaux de didacticiens des mathématiques sur la logique (V. Durand-Guerrier (2003, 2005, 2008), V. Deloustal-Jorrand (2001, 2004) et, en ce qui concerne l'œuvre de Lewis Carroll, sur des travaux

d'histoire des mathématiques (Moktefi (2007, 2008)), de littérature et de linguistique (Lecerclé (1980), Requier-Ulrich (2009)).

A l'issue de cette première étape, nous devons étudier les possibilités d'une organisation didactique de la situation. En particulier, nous déterminons des variables didactiques et les valeurs qu'elles peuvent prendre. Mais aussi le type de contrat que l'on peut prévoir afin de s'assurer de la dévolution de la situation aux élèves (voir I-3).

Soulignons enfin que notre travail ne prétend pas aboutir à la constitution d'une situation fondamentale pour l'implication. Nous utilisons ce modèle comme méthodologie de travail : sur la base d'une enquête épistémologique sur le concept d'implication mathématique et en particulier ses articulations avec l'implication du langage courant, nous nous proposons de construire un dispositif didactique à partir de récits de fiction pour travailler ce concept, sans pour autant aboutir à la généralité et l'exhaustivité d'une situation fondamentale.

I-2-b) Milieu expérimental a priori

L'étude théorique soutient l'étude du milieu expérimental a priori. Ce dernier est celui qui est construit par le chercheur dans le but d'une réalisation effective d'une situation, « celui où le jeu est identifié, le milieu antagoniste prévu, les variables pertinentes ont été définies » (Bloch (2002), p. 10). Afin d'analyser le milieu ainsi construit, nous nous appuyons sur la structuration du milieu selon le schéma de Margolinas (1998), complété dans Bloch (1999) et présenté dans Bloch (2002) (Annexe A). Nous ne retenons de ce schéma que le niveau a-didactique. En effet, lors de nos expérimentations, les élèves ont travaillé en dehors de la présence du ou des professeurs, le niveau sur-didactique n'est donc pas pertinent.

Selon ce schéma, le milieu de l'élève dans une phase de travail a-didactique, s'organise suivant trois dimensions : le milieu matériel, le milieu objectif, le milieu de référence.

- Le milieu matériel est constitué de ce qui est à disposition des élèves au départ : les documents (textes, consignes,...) mais aussi leurs connaissances. Notre étude ici consiste essentiellement en une analyse des textes proposés.
- Le milieu objectif est celui qui émerge de l'action. Lors de nos expérimentations nous n'avons pas observé les élèves pendant leur travail, nous ne retenons donc pas l'étude de cette dimension directement.
- Le milieu de référence est le milieu qui permet la formulation. Il repose sur le précédent auquel doivent s'ajouter pour nous les compétences langagières (écrites et orales) des élèves.

Etant données les conditions dans lesquelles nous avons mené nos expérimentations, nous retenons essentiellement les notions de milieu matériel et de milieu de référence. Nous faisons l'hypothèse que ces deux dimensions nous permettront de saisir le potentiel des textes choisis pour travailler la logique au lycée et au début du supérieur. Lors de cette étude nous avons été amenée à faire des choix, c'est-à-dire à donner des valeurs aux variables didactiques identifiées lors de

l'élaboration du milieu théorique. Pour certaines de ces variables, nos choix ont été différents pour les deux expérimentations ce qui nous permet de discuter de l'intérêt de ces valeurs.

I-2-c) Confrontation à la contingence

A l'issue de nos expérimentations, et grâce aux observations que nous avons faites, il nous faut analyser la réalisation effective de notre situation. I. Bloch préconise pour cela un travail suivant deux directions : une « clinique » l'autre « théorique » (Bloch (2002), p. 15 et Bloch (2005), p.58).

D'une part, il s'agit de savoir si les acteurs de la situation (élèves, mais aussi professeur), ont pu fonctionner comme prévu dans l'étude *a priori* et, dans le cas contraire, de déterminer les facteurs qui ont pu provoquer ce dysfonctionnement (valeurs des variables didactiques, connaissances préalables des élèves, ...).

D'autre part, il nous faut faire une analyse plus théorique de nos résultats en nous posant la question des connaissances (relatives au savoir visé) effectivement mobilisées pendant la réalisation de la situation : quels aspects de la notion d'implication logique ont été travaillés ? Au contraire, quels aspects ont été négligés ? Quelles sont les observables qui nous permettent de répondre à ces questions ?

Cette analyse *a posteriori* nous permettra de savoir quels aspects de logique nous avons pu travailler avec les élèves à l'aide des textes choisis, mais aussi de prévoir d'autres mises en œuvre de la situation en modifiant certaines variables didactiques par exemple.

I-3- Dévolution et contrat de lecture

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, les connaissances des élèves sont des outils pour résoudre les problèmes auxquels ils sont confrontés. Cette résolution permet, du point de vue de l'analyse, des changements de milieu signes d'un apprentissage. Il est donc nécessaire de s'assurer que, un problème étant donné, les élèves acceptent la responsabilité de sa résolution : c'est ce qu'on appelle la dévolution.

Le type de problème que nous étudions ici est particulier puisqu'il s'agit d'un travail sur des textes littéraires. On peut alors se demander en quoi la lecture d'un tel texte est assimilable à un problème au sens où nous l'entendons ici et ce que signifie « résoudre » un tel problème. C. Tauveron, nous donne un premier élément : « Nous considérons, avec d'autres, que la lecture littéraire est une activité de résolution de problèmes, problèmes que le texte pose de lui-même ou que le lecteur construit dans sa lecture. » (Tauveron (1999), p. 17). L'auteure poursuit : « Dans le même temps, nous distinguons, là où bien souvent règne l'amalgame, problèmes de *compréhension* et problèmes d'*interprétation*. » (Tauveron (1999), p. 17), puis elle distingue deux types d'interprétation que l'on peut rapprocher de la distinction faite par U. Eco entre interprétation sémantique et interprétation critique : « L'interprétation sémantique résulte du procédé par lequel le

lecteur, placé devant une manifestation linéaire du texte, la remplit d'un sens donné. L'interprétation critique est en revanche une activité métalinguistique visant à décrire et à expliquer pour quelles raisons formelles un texte donné produit une réponse donnée. » (Eco (1992), p.229). C'est cette dernière qui nous intéresse particulièrement ici : si les « raisons » du texte sont de nature logique, alors on peut postuler que les élèves-lecteurs devront mobiliser des connaissances de logique pour produire une interprétation critique du texte.

Dans Tauveron (1999), l'auteure fait ensuite l'hypothèse que le travail interprétatif ne peut être déclenché que pour des « textes qui ne se laissent pas résumer aisément et/ou des textes qui ne livrent pas leur sens symbolique aisément, en d'autres termes, des textes 'résistants' » (Tauveron (1999), p. 18). Ces textes « résistants » peuvent être réticents et/ou proliférants. La réticence d'un texte est source de problèmes de compréhension : il empêche le lecteur de saisir immédiatement son message ou il le conduit sciemment à une compréhension erronée. La prolifération quant à elle est source de problèmes d'interprétation : « les textes proliférants sont des textes ouverts, présentant de nombreux éléments potentiellement polysémiques, des indices pouvant entrer dans plusieurs réseaux et donc diversement interprétables » (Tauveron (1999), p. 20). Le lecteur doit alors faire des choix d'interprétation pour comprendre le texte : « ce que nous appelons INT1 est une suite d'élections locales de sens là où il y a pluralité de choix et concourent à se forger une représentation (parmi d'autres) globale et cohérente de l'intrigue ». Il s'agit donc ici d'un travail sémantique sur le texte. Le second type d'interprétation que définit C. Tauveron, et qu'elle nomme INT2, est de nature herméneutique, c'est celle que nous reconnaissons dans l'interprétation critique d'U. Eco.

Cependant Tauveron (1999), tout en insistant sur l'effort interprétatif comme point commun de l'activité scientifique et de la lecture littéraire (d'un point de vue didactique), souligne que « le sujet interprétant ne mobilise pas exactement les mêmes parts de lui-même dans les deux cas et la succession des interprétations chez un même sujet, en littérature, n'est pas nécessairement le signe d'un franchissement progressif d'obstacles cognitifs » (Tauveron (1999), p. 33). Il est donc essentiel pour nous que la dévolution se fasse dans le cadre d'un contrat didactique pour la logique, et pas seulement par une lecture interprétative et critique des textes proposés.

Le contrat lié au milieu que nous construisons doit permettre aux élèves de prendre la responsabilité du travail d'interprétation critique du texte qui leur est proposé. En prenant en compte les résultats de Tauveron (1999), nous devons donc nous assurer que les textes que nous proposons ont un caractère proliférant afin que leur lecteur modèle² s'engage dans un travail d'interprétation, en particulier d'interprétation critique. Ce que nous appelons l'étude du *contrat de lecture*, c'est l'étude de ce lecteur modèle. Ce contrat doit aussi avoir une composante didactique pour que l'activité engagée par les élèves concerne la logique.

² « Le Lecteur Modèle est un ensemble de *condition de succès* ou de bonheur (*felicity conditions*), établies textuellement, qui doivent être satisfaites pour qu'un texte soit pleinement actualisé dans son contenu potentiel » (Eco (1985), p. 77)

I-4- Questions de recherche

L'objet de notre réflexion est de saisir certaines caractéristiques d'un milieu permettant de travailler la logique au lycée et à la transition lycée-université. Nous faisons l'hypothèse que pour des raisons culturelles, historique et épistémologiques, certains textes des œuvres de Lewis Carroll, dans le cadre d'un contrat de lecture, permettent aux élèves de proposer plusieurs interprétations qui donneront lieu à un débat. Le dispositif didactique que nous construisons se donne pour objectif de mettre les élèves en situation d'utiliser des connaissances de logique pour s'engager dans ce débat en particulier de questionner l'articulation entre la logique du langage courant et la logique mathématique.

Sur la base de notre étude théorique, nous avançons l'hypothèse selon laquelle certains éléments du *Nonsense* présents dans *Alice's adventures in wonderland* et *Through the looking glass* problématisent l'implication logique. Nous proposons alors deux milieux matériels et une expérimentation pour chacun pour confronter nos hypothèses à la contingence. Nos observations nous permettent d'identifier ce qui n'est pas conforme à ce que nous avons prévu dans notre analyse *a priori*. Nous nous intéressons en particulier à la dévolution de la situation : est-ce que les élèves ont pris la responsabilité de la résolution du problème ? Si non, à quoi peut-on attribuer cette difficulté ? Au milieu ? Au(x) contrat(s) ? Au savoir ? Est-ce que les élèves ont mobilisé les connaissances prévues ? D'autres éléments non prévus ont-ils émergés ?

II- Analyse épistémologique : éléments pour un milieu théorique

L'objet de notre étude est une situation basée sur certains textes extraits d'*Alice's Adventures in Wonderland* et de *Through the Looking Glass* de Lewis Carroll pour travailler la logique, en particulier le concept d'implication. Il nous faut donc analyser ce concept comme le préconise I. Bloch : « faire une analyse mathématique et épistémologique du concept et de ses inscriptions dans des systèmes de signes (ostensifs) » (Bloch (2005), p. 46). Lors de cette analyse nous donnons aussi les obstacles que peuvent rencontrer les élèves en nous basant sur de précédentes études de didactique des mathématiques (Deloustal-Jorrand (2001, 2004), V. Durand-Guerrier (2003, 2005, 2008)). Dans un deuxième temps, nous justifions l'utilisation de textes de fiction de Lewis Carroll d'un double point de vue historique et littéraire. Lewis Carroll occupe une place particulière dans l'histoire de la logique mathématique que nous rappelons en nous appuyant sur la thèse d'Amirouche Moktefi (Moktefi (2007), (2008)), ce qui était notre hypothèse d'un point de vue culturel. Mais le plus important peut-être pour notre sujet, est le caractère *nonsensique* de l'écriture de Lewis Carroll : nous défendons dans la suite l'idée que le *nonsense*, dans le cadre d'une interprétation critique au sens d'U. Eco, est porteur de déséquilibres et de contradiction typique du caractère antagoniste du milieu de l'élève (Lecerle (1981)).

II-1- L'implication logique : quels obstacles pour les élèves du secondaire ?

L'implication mathématique est une modélisation de l'implication « naturelle » (celle du langage courant), ces deux notions sont donc à la fois proches et distinctes (Deloustal-Jorrand (2001), p.2). Cette distance n'est cependant pas toujours aisée à saisir, V. Durand-Guerrier s'y est attachée dans ses travaux, dans une perspective didactique (Durand-Guerrier (2003, 2008) par exemple).

Dans Durand-Guerrier (2003) l'auteure propose une analyse épistémologique de la notion d'implication mathématique, nous retenons ici en particulier sa synthèse des quatre types d'énoncés conditionnels de Quine (1950) auxquels elle ajoute la notion d'implication ouverte :

- Dans *le langage courant*, les énoncés du type « si P alors Q » ne retiennent que le cas où P est vraie.
- *L'implication matérielle* : la valeur de vérité de « si P alors Q » ne dépend que des valeurs de vérité de P et de Q : « si P alors Q » signifie « (non P) ou Q ». V. Deloustal-Jorrand a montré que, dans les manuels, la définition de l'implication est souvent réduite à la donnée du cas où P est vraie (Deloustal-Jorrand (2001), p. 5), mais une telle définition ne permet pas de distinguer une implication de sa réciproque (a fortiori de l'équivalence) ni d'appréhender l'implication contraposée.
- *L'implication logiquement valide* : dans le calcul des propositions, ces énoncés sont aussi appelés tautologies ; ce sont des énoncés formels vrais pour toute distribution de valeur de vérité. En particulier, les énoncés formels $([P \text{ et } (P \Rightarrow Q)] \Rightarrow Q)$ (1) et $([(\text{non} Q) \text{ et } (P \Rightarrow Q)] \Rightarrow (\text{non} P))$ (2) sont des implications

logiquement valides puisque, quelques soient les valeurs de vérité de P et de Q elles sont vraies ; on peut le montrer en établissant leurs tables de vérité. Ces deux tautologies sont associées respectivement aux deux principales règles d'inférence valides liées à l'implication : le Modus Ponens (« Si A alors B » ; or A ; donc B) et le Modus Tollens (« si A alors B » ; or non B ; donc non A).

Notons que le Modus Tollens nécessite de prendre en compte le cas d'un antécédent faux dans une implication et que des psychologues ont montré que des enfants pouvaient l'utiliser à partir de l'âge de 8 ans (Durand-Guerrier (2003), p. 10). La distinction entre l'implication matérielle et les phrases conditionnelles du langage courant n'est donc peut-être pas aussi nette que ce qui a été dit plus haut et on peut postuler que l'utilisation du Modus Tollens permettrait d'établir des liens entre l'usage courant de l'implication et l'implication matérielle.

- *L'implication universellement quantifiée* : la logique des propositions dont nous avons parlé jusque là n'est pas suffisante pour faire des mathématiques, il faut aussi considérer des énoncés quantifiés du type « $\forall x (Px \Rightarrow Qx)$ » où P et Q sont des prédicats. Pour définir l'implication universellement quantifiée, il est non seulement nécessaire de faire appel à l'implication matérielle (dimension syntaxique), mais aussi de prendre en compte le domaine de quantification (dimension sémantique) : « propositional logic is developed as an axiomatic system according to a syntactic perspective [...], while quantified logic as defined by Frege and Russell clearly needs a semantic perspective to take into account interpretation and issues concerning the domain of quantification. » (Durand-Guerrier (2008), p. 375).

Pour faire le lien entre l'implication matérielle et l'implication universellement quantifiée et permettre de prendre en compte la dimension sémantique, Durand-Guerrier (2003) préconise d'utiliser les phrases ouvertes « $Px \Rightarrow Qx$ » où x est une variable libre. L'existence de ces phrases est souvent empêchée dans la classe de mathématique par l'utilisation de la « règle » selon laquelle, quand la quantification d'un énoncé n'est pas précisée, il s'agit d'un énoncé universel. « Cette pratique massive cache la distinction entre *implication entre propositions*, *implication universellement quantifiée* et *implication ouverte*, et fait disparaître l'importance de l'univers du discours pour établir la vérité d'un énoncé général. » (Durand-Guerrier (2005), p. 1). Dans une perspective didactique, V. Durand-Guerrier a montré que, travailler en classe avec des implications ouvertes, prendre en compte les énoncés contingents, permet de « réduire la distance entre le raisonnement commun [...] et le raisonnement mathématique »³.

Par ailleurs, V. Deloustal-Jorrand a identifié quatre caractéristiques de l'implication « naturelle » (celle du langage courant) qui ne coïncident pas avec celles de l'implication mathématique. Nous retenons de Deloustal-Jorrand (2004), pour la logique « naturelle », la confusion entre « si », « seulement si » et « si et seulement si », la nécessité d'ordre moral, le cas d'une prémisse fautive et la conception causale-temporelle. La première est illustrée en particulier

³ « shorten the distance between common reasoning [...] and the mathematical reasoning » (Durand-Guerrier (2003), p. 29)

par l'exemple « demain je t'emmènerai à la piscine s'il fait beau » (Deloustal-Jorrand (2004), p. 14) qui est le plus souvent interprété en « demain je t'emmènerai à la piscine seulement s'il fait beau ». La nécessité d'ordre moral est marquée par la locution « il faut » qui se rapporte plus souvent à un ordre qu'à une condition nécessaire. Nous avons déjà évoqué le cas d'une prémisse fautive, mais V. Deloustal-Jorrand, à partir d'exemple de phrases conditionnelles à prémisse fautive, met en évidence une conception du langage courant : celle selon laquelle « si P alors Q » impose un lien de cause à effet entre P et Q, et une chronologie (P précède Q dans le temps) ce qui n'est pas le cas pour l'implication mathématique (Deloustal-Jorrand (2004), p. 22).

Nous retenons, pour l'analyse de notre situation les trois cadres pour l'implication mathématiques (logique formelle, ensembliste et raisonnement déductif) et cinq types d'énoncés conditionnels : l'implication du sens commun, l'implication matérielle, les règles d'inférence, l'implication universellement quantifiée et l'implication ouverte. Nous utilisons ces trois cadres et ces cinq types pour l'analyse *a priori* des textes de Lewis Carroll, mais aussi pour analyser les observations obtenues au cours de nos expérimentations.

II-2- Logique et langage dans les textes de Lewis Carroll

Charles Lutwidge Dodgson (1832-1898), plus connu sous le nom de Lewis Carroll, fut professeur de mathématique à l'université d'Oxford de 1855 jusqu'à sa mort. Ses centres d'intérêt sont nombreux : s'il est particulièrement connu pour ses œuvres de fiction (*Alice's Adventures in Wonderland* (1865), *Through the Looking Glass* (1872), mais aussi *The Hunting of the Snark* (1876), *Sylvie and Bruno* (1889)...), il est aussi photographe, auteur de plusieurs ouvrages de mathématiques⁴...et passionné de logique. Les publications de Lewis Carroll sur la logique sont assez tardives (*Game of Logic* (1886), *Symbolic Logic* (1896), deux articles publiés dans la revue *Mind* « A logical paradox » (1894) et « What the Tortoise said to Achilles » (1895) principalement), mais son intérêt pour la logique date de bien avant comme le montre Moktefi (2008) (p. 49), et beaucoup de commentateurs ont souligné la présence de la logique dans les œuvres de fiction de L. Carroll. Par exemple : « Les œuvres logiques, réputées « sérieuses », de Carroll, expliquent le cheminement de sa pensée et en donnent les raisons profondes, mais toutes ses œuvres de *nonsense* la montrent en action. » (Gattégno (1966), p. 18).

Après une brève présentation historique des travaux de Lewis Carroll sur la logique (Moktefi (2007, 2008)), nous nous attachons dans cette partie à comprendre en quoi le *nonsense* carrollien, tel qu'il est présent dans les deux *Alice*, permet de postuler que l'étude de certains textes peut constituer une situation pour travailler la logique avec des élèves (Lecerclé (1981), Requier-Ulrich (2009)).

⁴ Pour des références sur les travaux mathématiques de L. Carroll, on pourra consulter Moktefi (2008), note 4, p. 458.

II-2-a) Le travail de Lewis Carroll sur la logique : une place particulière dans l'histoire

L. Carroll est plus connu pour ses récits de fiction que pour ses publications concernant la logique. Cependant, A. Moktefi (2008) démontre que l'intérêt de L. Carroll pour la logique est bien antérieur à la publication de *The Game of Logic* (1886). En effet, son intérêt pour *Les Eléments* d'Euclide est de nature logique et ses notes personnelles attestent des questions qu'il se pose. (Moktefi (2008), p. 461). Par ailleurs, du point de vue de l'historiographie de la logique, A. Moktefi justifie que « Si le cas Lewis Carroll n'est [...] peut-être pas le plus représentatif de « l'avancement » de la logique au XIXe siècle, il est cependant un très bon exemple de « l'état » de la logique à l'époque. Son œuvre révèle en effet des influences multiples, parfois contradictoires, et montre la complexité à dégager « une » logique qui aurait prévalu à un moment donné. » (Moktefi (2007), p.12). Nous ne rentrons pas dans les détails de l'« état » de la logique en Angleterre au XIXe siècle, pour cela nous renvoyons aux travaux d'A. Moktefi et ne retenons que quelques éléments qui nous paraissent pertinents pour notre étude.

L'intérêt de L. Carroll pour la logique ne se limite pas à la logique pour les mathématiques, mais au contraire, il défend l'idée que la logique doit permettre de mener des raisonnements corrects au quotidien (Moktefi (2007), p. 13). *The Game of Logic* (1886), son premier ouvrage de logique, ne rencontre pas un grand succès. Il recevra un meilleur accueil avec *Symbolic Logic* (1896), au moins de la part du public (mais pas ou très peu des logiciens) (Moktefi (2008), p. 463). « There are two important concepts, which permit us to understand fully Carroll's logic of classes⁵ : the universe of discourse and the division by dichotomy. Both were widely discussed by nineteenth century British logicians" (Moktefi (2007), p. 466). Cette notion d'univers du discours est attribuée à A. de Morgan et résout le problème des prédicats de type « non-homme » qu'Aristote rejette parce que ce n'est pas un nom : « De Morgan rejette une telle distinction entre les noms en faisant appel, ceci est remarquable, à l'usage de la langue courante, contre la pratique, paradoxalement restreinte malgré les apparences, des logiciens qui ne se sentent les coudées franches que dans l'univers entier des conceptions possibles, alors qu'ils pourraient et même devraient se donner comme champs d'activité des « univers » plus limités. » (Coumet (1972), p. 20). Nous pouvons donc noter que les questions auxquelles s'intéressent L. Carroll en son temps peuvent être rapprochées de celles que nous nous posons sur l'implication : l'importance de la place donnée au raisonnement déductif (la syllogistique Aristotélicienne pour L. Carroll) et l'intérêt pour la notion d'univers du discours (problème soulevé par la notion d'énoncé contingent). Cependant, il faudrait mener une étude plus poussée pour prendre la pleine mesure de l'adéquation des conceptions de L. Carroll sur la logique et les choix de transposition didactique faits pour l'enseignement de la logique en France aujourd'hui.

⁵ Celle qu'il développe dans *Symbolic Logic*

II-2-b) Le *nonsense* carrollien et la logique

Le *nonsense* est un genre littéraire difficile à définir⁶. Notons d'abord que l'on conserve en français le terme anglais « *nonsense* » afin de le distinguer du « non-sens » au sens de l'absence de sens : « Le non-sens est à la fois ce qui n'a pas de sens, mais qui, comme tel, s'oppose à l'absence de sens en opérant la donation de sens. Et c'est ce qu'il faut entendre par *non-sense* » (Deleuze (1969)), p. 89). C'est d'ailleurs ce qui, toujours selon Deleuze, distingue le *nonsense* de l'absurde.

Nous ne tentons pas ici de définir ce genre, ni même de rendre compte de la diversité des études sur le sujet. Il s'agit plus humblement de souligner certains éléments caractéristiques du *nonsense*, tel qu'il est pratiqué par L. Carroll, et qui permettront à la situation que nous étudions de fonctionner comme un jeu (au sens de la théorie des situations didactiques) pour travailler la logique.

Lecerclé (1981) met en évidence les liens étroits qu'entretiennent le *nonsense* et la logique : « En filigrane se dessine une stratégie parallèle à la stratégie strictement linguistique du Nonsense : inquiéter les raisonnements bien formés, ce qui sera le rôle du sophisme ou de la feinte déraison, mais aussi marquer leur solidité, et ce sera le rôle de l'insistance sur les articulations du langage [...] » (p. 153) puis : « on peut donc s'attendre à retrouver, sous la forme de l'opposition – qu'il faudra préciser – entre « forme » et « contenu », la même opposition que nous avons décrite au chapitre précédent, entre contraintes optionnelles (sémantiques pour la plupart) et contraintes obligatoires (syntaxiques pour la plupart) : libérer le contenu, ce sera insister sur la forme. » (p. 153).

J.-J. Lecerclé ajoute : « Le Nonsense « spirituel » [celui de Carroll, par opposition au Nonsense plat de Lear par exemple] met en jeu la logique du sens commun, il en explore les limites, en utilise les failles, et la compare avec une autre logique, celle du logicien ; cette exploration d'une divergence a pour but de renforcer la logique présente dans les langues naturelles à l'état pratique » (p.161). La question de l'articulation entre la logique « du logicien » et celle du « sens commun » est au cœur de notre réflexion. En effet, comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, les énoncés contingents, souvent exclus de la classe de mathématiques, ont pourtant un réel intérêt pour le travail sur la logique et V. Durand-Guerrier a montré qu'ils sont présents dans le langage courant (avec la situation du labyrinthe par exemple, Durand-Guerrier (2003,2005)).

II-2-c) Le lecteur modèle du récit carrollien

Les deux *Alice* font partie de la culture de la plupart des enfants aujourd'hui, si ce n'est par les livres, au moins par leurs adaptations cinématographiques. Par ailleurs, la structure linéaire du

⁶ Voir par exemple la proposition de N. Cremona sur la page www.fabula.org/atelier.php?Nonsense (consultée le 14 septembre 2013) ou encore la définition de B. Cassin dans l'*Encyclopedia Universalis*.

récit et la simplicité du langage utilisé permettent au lecteur de comprendre l'histoire, de saisir la fabula au sens d'U. Eco⁷. Ainsi, S. Requier-Ulrich montre que, pour L. Carroll, « le lecteur ne doit pas être actif pendant la lecture : il le sera après. » (Requier-Ulrich (2009), p. 368). En ce sens, les récits carrolliens pourraient être qualifiés de « collaborationnistes », par opposition à « résistants » (Taveron (1999), p. 18).

Cependant, « l'une des principales fonctions des jeux avec la langue [ceux du *nonsense* carrollien] est [...] pédagogique : l'héroïne, et le lecteur, s'interrogent sur la langue et effectuent sans cesse un travail métalinguistique qui leur permet de percevoir les règles de fonctionnement du code langagier, donc de mieux le maîtriser » (Requier-Ulrich (2009), p. 313). Le lecteur modèle prévu par les contes de L. Carroll doit donc s'engager dans un travail d'interprétation critique pour saisir le sens symbolique du récit. A la lumière de ce que nous avons dit des rapports entre le *nonsense* et la logique, cela étaye notre hypothèse selon laquelle nous pouvons choisir des textes extraits des *Alice* pour que ce travail demande au lecteur/élève de mobiliser des connaissances de logique.

II-3- Analyse de la situation dans une perspective didactique

II-3-a) Caractéristiques d'un milieu favorable au travail de la logique

La logique est la science qui permet le contrôle de la validité des raisonnements. Le milieu antagoniste des élèves doit donc être producteur de désaccord à ce sujet. Comme nous l'avons dit en référence à Durand-Guerrier (2003), ces désaccords devront être de nature sémantique et syntaxique pour favoriser l'articulation entre la logique du langage courant et la logique mathématique. Or, nous venons de voir que ce point est justement caractéristique du *nonsense* carrollien. Afin de permettre aux élèves de s'engager dans une phase (a-didactique) de formulation, nous organisons le travail en groupe : les désaccords pourront alors aussi venir des autres élèves du groupe.

Nous avons aussi souligné que la logique mathématique est une modélisation de la logique du langage courant. Afin que les élèves mettent à distance la logique du langage courant et entament un travail de modélisation, il est nécessaire que la logique du langage courant se révèle insuffisante pour analyser et résoudre les problèmes qui se posent à eux. Nous faisons l'hypothèse que, dans les textes *nonsensique* de L. Carroll, la logique du langage courant, sans prise de distance, n'est pas suffisante pour faire le travail d'interprétation critique prévu par le contrat de lecture.

Enfin, en référence à Deloustal-Jorrand (2004), nous avons retenu trois cadres pour l'implication (logique formelle, raisonnement déductif, cadre ensembliste). Or, selon la théorie de Douady (1983), un jeu entre certains de ces trois cadres est producteur de déséquilibres. Les élèves devront alors faire fonctionner leurs connaissances sur l'implication pour rétablir l'équilibre.

⁷ « La fabula c'est le schéma fondamental de la narration, la logique des actions et la syntaxe des personnages, le cours des événements ordonné temporellement » (Eco (1985), p. 130)

Nous allons dans la suite, analyser les documents (textes, consignes, texte de présentation) proposés à la lumière de ces trois points. Nous tenterons de dégager des ostensifs permettant de discuter nos choix à la lumière des résultats obtenus lors des expérimentations en classe.

II-3-b) Méthodologie d'analyse des textes

Nous avons vu en II-1 que l'on peut retenir cinq types d'implication et trois cadres. En particulier nous avons montré l'importance des implications ouvertes (ou énoncés conditionnels contingents) et nous avons fait l'hypothèse que le milieu des élèves doit permettre des jeux de cadres.

Notre analyse des textes doit donc nous permettre d'identifier le(s) type(s) d'implication présent(s) et le(s) cadre(s) dans lesquels ils sont mobilisés. Mais aussi de comprendre comment, dans ces textes, l'implication du sens commun s'articule avec l'implication mathématique. Nous ajoutons donc un quatrième cadre : celui de la logique du sens commun. Notre problématique étant de tenter de caractériser les jeux entre ce cadre et un ou plusieurs des trois cadres de l'implication mathématique.

Nous rappelons que la principale distinction entre l'implication du sens commun et l'implication matérielle est le cas d'un antécédent faux. Ce cas peut se rencontrer dans le cadre de la logique formelle, où l'on doit traiter de la vérité de l'énoncé « $P \Rightarrow Q$ », mais aussi dans le cadre du raisonnement déductif quand on utilise le Modus Tollens. Un autre élément qui marque la distance entre l'implication matérielle et l'implication du sens commun est la conception causale.

L'articulation entre l'implication du sens commun et l'implication logiquement valide relève *a priori* du cadre du raisonnement déductif. Nous faisons l'hypothèse que les problèmes faisant jouer les deux cadres sens commun/raisonnement déductif créent des déséquilibres qui trouvent leur solution dans la distinction entre le valide et le vrai : pour qu'un raisonnement déductif soit correct, il doit reposer sur des règles d'inférence valides et utiliser des prémisses dont on connaît la valeur de vérité. Si on se trouve dans une situation où l'on doute de la vérité des prémisses (contingence), le contrôle syntaxique sur la forme du raisonnement peut nous permettre de comprendre comment un raisonnement de type déductif, amène une conclusion surprenante voire déroutante. Or, « [...] le syllogisme constitue l'archétype du texte que le Nonsense inquiète et défend à la fois » (Lecerclé (1981), p. 152). Il est donc raisonnable de penser que certains textes extraits des Alice permettent le jeu entre les cadres « sens commun » et « raisonnement déductif ».

Comme nous l'avons déjà dit, V. Durand-Guerrier (2003) a montré que l'articulation entre l'implication du sens commun et l'implication universellement quantifiée est problématisée par les énoncés contingents, énoncés pour lesquels, sans précision sur l'univers du discours, il est impossible de décider s'ils sont vrais ou faux. Or, nous faisons l'hypothèse que des récits de fiction d'une manière générale, ôtent toute certitude sur l'univers du discours et peut-être tout particulièrement ceux de L. Carroll, étant donné l'intérêt qu'il a porté à cette notion dans ses travaux de logique.

II-3-c) Variables didactiques

Nous présentons ci-dessous les variables didactiques que nous avons retenues dans notre étude :

- **Langue dans laquelle les textes sont proposés** : on peut penser que proposer des textes dans une langue étrangère constitue potentiellement un obstacle à la lecture, en particulier à la lecture interprétative. Cependant, on peut prévoir que, au contraire, le problème de compréhension qui se pose alors, déclenche un premier travail interprétatif (INT1 au sens de Tauveron (1999)).
- **Choix des textes**
 - **Sur la forme** : les extraits proposés aux élèves doivent être suffisamment longs pour permettre un travail d'interprétation riche : le texte doit en effet contenir des éléments donnant la possibilité de plusieurs interprétations, et à la fois en favoriser certaines et en invalider d'autres. S'ils sont trop longs, la sélection des « données » du problème risque d'être difficile. On peut ajouter ici, que les consignes peuvent ou non délimiter les passages que l'on peut étudier. Nous posons l'hypothèse que cette variable aura une influence notable sur la dévolution.
 - **Sur le fond** : quel(s) type(s) de problème(s) de logique y trouve-t-on ? De cette variable dépendront les connaissances à mobiliser pour résoudre le problème, et donc ce qui sera travaillé à propos de l'implication... on peut aussi penser que certains types de problèmes, plus proches des savoirs des élèves sur la logique (par exemple : raisonnement déductif, notion de réciproque), faciliteront la dévolution et que d'autres au contraire (cadre ensembliste) seront plus difficile à résoudre.
Est-ce que ce problème est central dans l'extrait ou pas ? Cela renvoie à la notion de texte proliférant : pour interpréter (INT2), il faut faire des choix : l'élève interprétant se concentrera très probablement vers les problèmes d'interprétation les plus évidents dans le texte. Si les problèmes relevant de la logique ne sont pas au cœur de l'extrait, le travail proposé risque de paraître artificiel aux élèves, ce qui sera un obstacle à la dévolution.
Est-ce que d'autres problèmes d'interprétation importants s'y trouvent ?
- **Scénarisation**
 - **La pluridisciplinarité institutionnelle, culturelle** : est-ce que le travail est proposé en classe de mathématique, en classe d'anglais (voir de français) ? On peut penser que cela influence le contrat didactique : le cloisonnement habituel des disciplines à l'école laisse penser aux élèves que les savoirs et les connaissances n'ont pas de lien d'un domaine à l'autre. Le contexte institutionnel peut donc influencer le type de connaissances que les élèves sont prêts à mobiliser pour résoudre le problème qui leur est posé.
 - **Dans quelle mesure est-ce qu'on explicite qu'il s'agit d'un travail sur la logique ?** Si cela n'est jamais même évoqué, la rupture avec le contrat habituel (avec le professeur de mathématiques on fait des mathématiques, on parle mathématique...) risque d'empêcher totalement la dévolution. On

fait donc l'hypothèse qu'il est nécessaire d'expliciter un minimum cette part du contrat didactique : la situation proposée va nous permettre de parler de logique. Ce qui reste libre par contre, c'est de dire plus précisément ce qu'on entend par « logique » ou pas. Ne rien dire, permettra de problématiser la nature de la logique mathématique comme modèle de la logique du sens commun. En dire un peu plus aidera peut-être à la dévolution du problème. Notons que les programmes de lycée depuis 2009 prévoient un travail de la logique avec les élèves, on peut donc penser qu'à partir de la fin de la seconde au moins les élèves ont une représentation de ce qu'est la logique. Si on fait le choix de ne pas donner d'élément sur ce qu'on entend par « logique », cela devrait permettre aux élèves de questionner certaines de leurs conceptions dans ce domaine.

- **Travail en classe ou pas ?** Un travail en classe est souhaitable, le rôle du professeur, dans une phase a-didactique, est en effet de donner les conditions d'une bonne dévolution de la situation. Nous avons déjà montré que la dévolution est pour notre situation un élément problématique. Cependant, pour des raisons de temps et d'organisation, nous n'avons pas toujours pu organiser ce temps en classe au début du travail des élèves, nous pouvons donc, à la lumière de nos observations, discuter de cette variable didactique.
- **Tout le monde a le même texte ou pas ?** Nous avons vu que les principales rétroactions envisageables viennent des débats qui peuvent s'installer entre les élèves. Si toute la classe a le même texte, les débats seront plus nourris. Cependant, chaque texte ne permet de travailler que quelques éléments sur l'implication (cf III-2), on peut alors prévoir que n'utiliser qu'un texte limite la diversité des connaissances utilisées par les élèves. On peut donc envisager de proposer le même texte à quelques élèves seulement pour diversifier les thèmes qui seront abordés au moment des exposés. C'est le choix que nous avons fait pour toutes nos expérimentations, nous discutons des limites de cette scénarisation dans la partie IV.

III- Constitution d'un milieu expérimental : analyse *a priori*

En suivant la méthodologie que nous nous sommes fixée et le schéma de structuration du milieu de l'élève, nous menons dans cette partie une analyse *a priori* de la situation que nous avons expérimentée. Il s'agit donc ici de prévoir l'expérimentation, de choisir des valeurs pour les variables que nous avons identifiées (milieu matériel), de forger des hypothèses sur le travail que peuvent engager les élèves, de prévoir les obstacles éventuels, et de dégager des observables qui nous permettront d'organiser la confrontation à la contingence.

III-1- Pré-expérimentation

Au cours de l'année 2011-2012 nous avons pour la première fois proposé à une classe de travailler sur la logique à partir de textes issus des *Alice* de Lewis Carroll, et ce à l'initiative du professeur d'anglais de cette classe. Nous présentons ci-dessous brièvement le déroulement global du travail en classe sur les textes alors utilisés, puis nous identifions les valeurs données aux variables didactiques de la situation et enfin, nous donnons certains éléments issus de nos observations et les conséquences que nous en tirons pour la suite.

III-1-(a) Déroulement global

Pour cette pré-expérimentation, le choix des textes a été principalement pris en charge par le professeur d'anglais. Celui-ci avait pour objectif de faire travailler les étudiants sur l'humour et le *Nonsense* en particulier. Lors d'une première séance, S. Requier-Ulrich a fait un exposé intitulé "A work in its time", à cette occasion les étudiants ont été évalués sur la qualité de leur prise de notes. Puis, les étudiants ont, durant deux séances, travaillé sur deux textes avec L. Langlade, leur professeur d'anglais (*Old Father William* et *The Mad Tea Party*), nous étions présente lors des deux premières séances.

Par la suite, nous avons organisé trois séances en classe. Au cours de la première, les étudiants, par petits groupes (3 à 4 étudiants), ont choisi le texte qu'ils souhaitent étudier puis ont commencé le travail pour proposer une problématique liée à la logique. Ils ont exposé leurs analyses argumentées lors d'une deuxième séance (une semaine plus tard), en présence de leur professeur d'anglais. La troisième et dernière séance a été consacrée à l'étude de l'article « *Ce que se dirent Achille et la Tortue* » de L. Carroll (Carroll (1966), pp. 242-246) en présence de V. Durand-Guerrier qui a pris en charge la direction de la séance et fait un exposé de logique aux étudiants. Cette séance s'est conclue par une présentation des diagrammes de L. Carroll (Carroll (1966)).

III-1-(b) Valeurs des variables didactiques

Les textes (annexe B) ont été proposés en anglais et leur longueur était variable (de 1 à 3 pages). Les passages qui nous semblaient intéressants n'étaient pas précisés dans la consigne qui était la même pour tous au départ. La responsabilité d'identifier les problèmes qui relevaient de la logique a été laissée aux élèves.

Les problèmes de logique que nous avons identifiés dans chacun des textes sont de nature sensiblement différente. Certains textes permettent des interprétations qui ne sont pas (ou pas directement) de nature logique (par exemple : le problème de l'identité pour « Advice from a Caterpillar », annexe B1). Pour d'autres le problème de logique est particulièrement difficile (par exemple : le nominalisme dans « Humpty Dumpty », annexe B5). Pour d'autres encore les éventuels problèmes de logique ne sont pas les principaux moyens utilisés pour créer du *nonsense* (par exemple : les jeux de mots dans « The Mock Turtle story », annexe B4).

La pluridisciplinarité a fortement été prévue par la scénarisation.

Il était explicite que le travail proposé portait sur la logique : l'activité concernait tous les étudiants de la classe (même ceux qui ne faisaient pas de mathématiques normalement), et nous leur avons annoncé dès le début du travail sur les textes qu'il y aurait une partie sur la logique. Par ailleurs, avant de donner les consignes, nous avons demandé aux élèves ce qu'évoquait la logique pour eux, et nous leur avons demandé d'étudier les textes à la lumière de ce qu'ils nous ont dit.

Nous avons consacré un moment en classe à la formulation pour chaque groupe d'une problématique liée à la logique pour l'étude de leur texte. Le but était de s'assurer de la dévolution du problème.

III-1-(c) Observations et conséquences

La dévolution du travail d'interprétation a été difficile : certains étudiants (à profil scientifique) sont restés très réticents face au travail sur des textes en anglais, nous avons dû leur proposer de chercher une traduction et de profiter du travail collectif pour commencer la lecture.

La dévolution des problèmes liés à la logique a, elle aussi, été difficile. Suivant les groupes on peut l'expliquer par différents facteurs, nous en identifions au moins deux : difficulté du problème de logique et/ou autre interprétation possible (et plus immédiatement accessible), effet du contrat didactique lié au contexte institutionnel (on doit à tout prix trouver des mathématiques dans le texte).

Cependant, la dernière séance a été plus satisfaisante. Malgré la difficulté de compréhension de l'article « *Ce que se dirent Achille et la Tortue* » et malgré le fait que les étudiants ne l'avaient visiblement pas lu comme cela leur avait été demandé, les interventions en classe ont été tout à fait

intéressantes et pertinentes. Cela nous a donc encouragé à retravailler la situation pour en tirer un meilleur parti didactique.

A la lumière de cette première mise en œuvre, nous avons fait un choix plus fin des textes à utiliser et précisé nos consignes. Faute de temps, et parce que nous n’enseignons plus en CPES, il nous était difficile d’envisager de travailler à nouveau sur le moyen terme avec les professeurs de la classe et d’organiser plusieurs séances, nos choix de scénarisation sont donc assez différents pour notre expérimentation en CPES. Par contre, nous avons conservé ce travail en trois temps pour l’expérimentation en seconde : une première séance de lecture et de préparation du travail, une deuxième consacrée aux exposés et une dernière pour une synthèse prise en charge par nous.

III-2- Analyse des textes proposés aux élèves

III-2-(a) Texte 1 : “Pig and Pepper”

Dans cet extrait, Alice est successivement en présence de deux personnages : le bébé-cochon puis le Chat. Nous nous intéressons en particulier à son dialogue avec le Chat (lignes 71 à 87).

Le Chat affirme “We’re all mad here. I’m mad. You’re mad.” (l. 71), puis Alice lui demande de démontrer son affirmation en ce qui la concerne et en ce qui concerne le Chat.

Démonstration de la folie d’Alice :

“You must be [mad][...] or you wouldn’t have come here” (l. 73). Il s’agit d’une inférence de type Modus Tollens : si on n’est pas fou on ne vient pas ici, or vous êtes venue ici, donc vous êtes folle. Mais Alice n’est pas convaincue. Le texte ne dit pas ce qui ne convainc pas Alice, qui n’insiste pas pour avoir une meilleure preuve de sa folie.

Démonstration de la folie du Chat :

Cette fois, le Chat énonce l’implication sur laquelle il va faire des inférences : « a dog’s not mad », il s’agit d’une implication universellement quantifiée (pour toute créature, si cette créature est un chien, alors elle n’est pas folle), l’article « a » joue le rôle d’un élément générique, la quantification et l’univers du discours sont implicites. Le Chat fait ensuite une inférence non valide sur cette implication : or, je ne suis pas un chien, donc je suis fou. Par ailleurs, pour démontrer qu’il n’est pas un chien, le Chat nie la phrase « a dog growls when it’s angry and wags its tail when it’s pleased ». Mais là encore ce qu’il propose n’est pas valide, puisqu’il utilise (au moins en apparence) la « règle » : non (P et Q) \Leftrightarrow (non P) et (non Q). Cependant, quand Alice objecte que pour un chat on dit plutôt « purring » que « growling », le Chat rétorque « Call it what you like ». On peut proposer au moins deux interprétations ici : le Chat sait que son raisonnement n’est pas valide, peut importe alors le contenu sémantique ou alors, la négation de « wags its tail when it’s pleased » est suffisante pour faire son inférence.

Ce texte peut donc permettre de travailler sur la validité des règles d’inférences utilisées, mais aussi sur la notion d’univers du discours (ou domaine de quantification) et la négation d’une

phrase du type « P et Q ». Notons aussi que le Chat mène une démonstration de sa propre folie, un même personnage est donc considéré raisonnable et fou, situation relativement paradoxale.

III-2-(b) Texte 2 : “A Mad Tea Party”

Cette scène, comme la précédente, est certainement l’une des plus connues des deux contes : Alice s’invite à une table où se trouvent le Chapelier Fou, le Loir et le Lièvre de Mars. Au début de la rencontre, les échanges entre Alice et les autres personnages concernent les convenances et règles de politesse. Ce thème est typique de la critique de Lewis Carroll en ce qui concerne les récits de jeunesse de l’époque victorienne : il ne s’agit pas pour lui de dicter leur conduite aux enfants, mais de leur donner la possibilité de penser par eux-mêmes⁸.

Le passage qui nous intéresse particulièrement concerne la discussion autour des couples de phrases « I mean what I say »/ « I say what I mean », « I see what I eat »/ « I eat what I see », « I like what I get »/ « I get what I like » et « I breathe when I sleep »/ « I sleep when I breathe ». En première lecture on peut interpréter ces phrases comme des couples implication/réciproque : si je le dis, je le pense/si je le pense, je le dis, par exemple. Alice affirme que les deux phrases signifient la même chose, les autres protagonistes lui rétorquent, chacun sur un exemple, qu’au contraire les deux phrases ne sont pas synonymes. Nous pouvons donc analyser ce passage au moins à deux niveaux : la stratégie d’argumentation et la discussion sur chacun des couples de phrases.

Pour convaincre Alice que « I mean what I say » et « I say what I mean » ne signifient pas la même chose, le Chapelier, le Lièvre et le Loir lui énoncent chacun un couple de phrases suivant le même « forme ». Leur argumentation repose donc sur un argument de logique formelle. Il s’agit d’infirmer la validité de la formule (si P alors Q) \Leftrightarrow (si Q alors P) en proposant des interprétations dans lesquelles elle n’est pas vraie.

Cependant, si l’on se place du point de vue du calcul des prédicats, le problème n’est plus aussi immédiat, et c’est ce que semble indiquer la remarque du Chapelier à propos de la phrase du Loir : « it is the same thing with you ». En effet, chacune de ces phrases dépend de plusieurs variables : l’énonciateur, mais aussi par exemple de l’instant. A un instant *t*, ce que je pense et ce que je dis peuvent tout à fait coïncider exactement : c’est peut-être ce qu’Alice a voulu dire. Par contre, si l’on prend ce point de vue, pour ce que l’on mange et ce que l’on voit, cela signifierait que, au moment même où l’on mange quelque chose, on le voit... on devrait alors voir à l’intérieur de notre bouche, de notre estomac ? On peut cependant aussi voir de la contingence dans ces phrases, prenons par exemple « I eat what I see » : au sens littéral du terme, cette situation semble peu probable (cela impliquerait en particulier que je mange la table, l’assiette, les couverts...), cependant, ne dit-on pas de certaines personnes qu’elles mangent « tout ce qui leur tombe sous la main » ? Le domaine d’interprétation est alors « l’ensemble des choses comestibles ».

L’étude de cette discussion entre les quatre personnages peut donc permettre de travailler la notion de vérité d’un énoncé suivant sa forme (validité), la notion de vérité dans un domaine d’interprétation, ainsi que les énoncés contingents dont on a vu qu’ils sont un point d’articulation

⁸ A ce sujet, on pourra consulter par exemple Requier-Ulrich (2009), pp.16-18

essentiel entre l'usage de l'implication dans le langage courant (le domaine d'interprétation étant alors souvent implicite et déterminé par le contexte) et de l'implication mathématique.

III-2-(c) Texte 3 : « Advice from a Caterpillar »

Dans cet extrait, Alice vient de subir une nouvelle métamorphose : son cou s'est allongé. C'est la cause du malentendu qui s'installe avec le Pigeon : celui-ci la prend pour un serpent. Il faut dire que même Alice se compare à un serpent (l. 18), le doute est donc permis.

Au début de la discussion entre Alice et le Pigeon, ils n'argumentent pas, mais se contentent d'affirmer leur position (l. 26-27). Puis, le Pigeon demande à Alice de lui prouver qu'elle n'est pas un serpent en lui demandant « *What are you ?* ». Le problème de l'identité est prégnant dans le conte, et dans ce chapitre en particulier⁹ : avant le Pigeon, elle y rencontre le Ver à Soie qui lui demande qui elle est. Mais la question du Pigeon n'est pas « *Who are you ?* », mais bien « *What are you ?* » ce qui renvoie à l'appartenance à une espèce plutôt qu'à une identité propre et individuelle. La démonstration du Pigeon repose d'ailleurs sur une propriété des serpents, ils mangent des œufs. Nous interprétons cela comme une discussion sur les conditions nécessaires et les conditions suffisantes d'appartenance à un ensemble : les serpents mangent des œufs (il est nécessaire de manger des œufs pour être un serpent), mais le Pigeon semble considérer cette condition comme suffisante (les êtres qui mangent des œufs sont des serpents). Cette idée laisse Alice sans voix : « This was such a new idea to Alice, that she was quite silent for a minute or two [...]. » La distinction entre les notions de conditions nécessaires et de conditions suffisantes ne sont pas aisées, et pas toujours très nettes dans le langage courant, on peut donc penser qu'Alice, comme le Pigeon, ne perçoit pas la différence. Mais on peut aussi penser que, dans le pays des Merveilles, où les animaux parlent, où les lapins marchent sur leurs deux pattes arrière, où les petites filles peuvent avoir un coup si long qu'elles ne voient plus leurs épaules, le genre « serpent » contient l'espèce « petite fille »¹⁰.

Ce texte permet de travailler, dans le cadre ensembliste, les notions de condition nécessaire et de condition suffisante. Le caractère merveilleux du conte permet de faire jouer différentes interprétations et de travailler la contingence.

III-2-(d) Texte 4 : « Queen Alice »

A la fin du chapitre qui précède immédiatement cet extrait, Alice réalise qu'elle est reine (elle porte une couronne sur la tête). Elle affronte ici la Reine Rouge et la Reine Blanche qui lui contestent

⁹ Il y a d'ailleurs une erreur de référence dans les textes donnés aux élèves, il s'agit du chapitre 5 et non du chapitre 10.

¹⁰ Nous entendons ici « genre » et « espèce » au sens défini par L. Carroll dans la *Logique sans Peine* : « Nous pouvons penser à la classe 'choses' et supposer que nous lui avons enlevé toutes les choses qui ont une qualité donnée que ne possède pas la classe en sa totalité. [...] En ce cas, la classe 'choses' est appelée 'genre', par rapport à la classe ainsi formée ; cette dernière classe est appelée 'espèce' de la classe 'chose' » (Carroll (1966), p.54)

le droit d'être reine. Nous retenons deux passages pertinents pour la question qui nous occupe ici : les lignes 24 à 35 et les lignes 35 à 64.

Dans le premier passage, la Reine Rouge dit à Alice « *Speak when you're spoken to !* », Alice rétorque, que si tout le monde suit ce précepte, alors personne ne pourra jamais parler. Notons que dans son argumentation, Alice rajoute un « *only* » : « *if you only spoke when you were spoken to [...]* » (l. 28). Cet exemple est très intéressant pour comparer l'usage du « *si* » dans le langage courant et dans la logique formelle : il est en effet parfois utilisé au sens du « *seulement si* » (par exemple, quand on promet une récompense à un enfant : « *si tu manges ta soupe, tu auras un dessert* »). Le texte ici ne permet de pas de décider si Alice fait la bonne interprétation de ce que dit la Reine, en effet, cette dernière l'interrompt, débute une argumentation, mais elle s'arrête brutalement : « *Ridiculous ! [...] Why don't you see, child -* » (l. 32). Ce vide créé dans le texte (la Reine ne se contente pas de changer de conversation, son intervention met le vide en évidence), incite le lecteur à tenter de compléter la phrase de la Reine. On peut considérer que l'interprétation d'Alice était la bonne, l'usage de l'impératif « *Speak* » est le signe d'un ordre et, c'est une règle de bonne manière pour un enfant que de ne prendre la parole que quand on la lui accorde. Dans ce cas, la Reine a peut-être l'intention de rétorquer à Alice que son ordre la concerne *elle* et pas tout le monde. D'ailleurs, Alice extrapole explicitement ce que dit la Reine : « *if everybody obeyed that rule [...]* » (l. 26) avant de se lancer dans un raisonnement par récurrence : tout le monde obéit à la règle « *si on ne vous parle pas, ne parlez pas* » qui assure l'hérédité de la propriété « *l'individu n ne parle pas* »... mais Alice « *oublie* » l'initialisation, rôle que se réserve la Reine. Il y a donc au moins deux objections au raisonnement d'Alice : elle a généralisé une phrase qui était adressée à elle seule, et de l'hérédité d'une propriété, elle déduit que cette propriété est universellement vraie.

Mais on peut aussi prendre le point de vue de la logique formelle, en particulier si on se souvient de l'interprétation de « *when* » que nous avons faite dans le texte 2 (dans « *I sleep when I breathe* » par exemple). Dans ce cas, l'ordre de la Reine s'interprète en « *si l'on vous parle, parlez* », et le raisonnement d'Alice ne tient plus. Cette seconde interprétation est moins pertinente selon nous, parce que moins conforme aux usages du langage courant. Ajoutons qu'Alice est un personnage qui n'hésite pas à s'opposer à l'autorité, « *chez Carroll, l'impertinence et la rébellion sont positives et récompensées* » (Requier-Ulrich (2009), p. 381). La comparaison avec le texte 2 peut donc être intéressante pour discuter des différences entre langage courant et logique formelle : dans le texte 2, l'interprétation formelle est appuyée par l'utilisation des couples de phrases implication directe/réciproque, dans le texte 4 par contre, le contexte nous incite à faire une autre interprétation de l'usage du « *when* ».

Dans le second passage que nous retenons (l.35 à 64), la Reine Rouge reproche à Alice de se croire reine. Alice lui répond qu'elle a seulement dit « *if I really am a Queen* » (nous soulignons)(l. 12), mais pas qu'elle est effectivement une reine. Et la discussion semble s'inverser plus loin: la Reine Rouge dit à Alice : « *You couldn't deny that, even if you tried with both hand* » et Alice réplique : « *I don't deny things with my hands* », ce à quoi la Reine répond : « *Nobody said you did* ». La Reine semble se contredire elle-même : quand Alice dit « *if* », la Reine considère que ce qui suit « *if* » est vrai, mais quand elle l'utilise elle-même ce n'est plus le cas. Le point de vue de la logique formelle, nous permet de dire que cette contradiction est réelle, et que la bonne compréhension du « *if* » est la seconde : la phrase (si P alors Q) supporte toutes les distributions de vérité de P et de Q, en particulier le cas où P est fausse. Cependant, il y a une différence entre « *If I really am a Queen* » et

« you couldn't deny it [...] if you tried [...] »: la première est énoncée à l'indicatif, la seconde au conditionnel et l'indicatif indique une plus grande probabilité. D'ailleurs, si on a lu la fin du chapitre précédent, on sait qu'Alice est effectivement reine. Elle cherche donc uniquement une confirmation de ce qu'elle sait déjà. Ce passage permet donc d'articuler l'implication du langage courant et l'implication matérielle. Ajoutons que la prescription de la Reine Rouge « Always speak the truth » (l. 50) soulève aussi des questions : comment raisonner en ne considérant que des vérités déjà établies ? Cela n'interdirait-il pas aux scientifiques (et aux élèves) d'émettre des conjectures ? Lewis Carroll lui-même n'est-il pas en train de transgresser cette règle en écrivant des récits de fiction ?

Le dialogue entre Alice et les deux reines, peut donc nous permettre de travailler l'articulation entre l'implication du langage courant et l'implication matérielle, dans le cadre de la logique formelle. On a aussi relevé un raisonnement par récurrence et une réflexion possible sur la notion de vérité.

III-3- Valeurs des variables didactiques et consignes

Nous tenions à étudier l'effet de la variable didactique « langue dans laquelle les textes sont proposés ». Lors de notre pré-expérimentation, nous avons constaté que, proposer les textes en anglais pouvait constituer un obstacle à la dévolution. Les élèves concernés par cet obstacle étaient plutôt faibles en anglais, et leur projet d'étude ne les incitait pas à remédier à cette faiblesse. Nous faisons l'hypothèse que la classe de CPES est, à ce sujet, assez particulière : ce sont des étudiants, titulaires du baccalauréat général mais avec un bagage académique et culturel qui leur a semblé insuffisant pour aborder des études supérieures d'emblée. Si certains d'entre eux profitent de cette année préliminaire pour s'ouvrir à de nouveaux domaines, pour aiguïser leur curiosité, d'autres au contraire sont très réticents à l'idée de consacrer du temps et de l'énergie à travailler des choses dont ils ne voient pas l'utilité immédiate. Nous ne disons pas que de tels élèves n'existent pas dans les autres niveaux, mais le phénomène est amplifié en CPES sous l'effet de plusieurs facteurs : l'effectif est faible (15 étudiants en 2011-2012), la dynamique de classe est donc fortement influencée par l'attitude de quelques uns, et les étudiants choisissent les disciplines qu'ils veulent suivre, ce qui les rend parfois encore plus critiques quant aux contenus. Nous avons donc, pour nos expérimentations, renoncé à proposer un travail sur les textes en version originale pour les CPES, et nous avons choisi la traduction d'Henri Parisot (Œuvres (1990)). Par contre, nous avons pensé que des élèves de section européenne pouvaient être intéressés par un travail sur la langue, c'est pourquoi notre seconde expérimentation s'est tenue dans le cadre du cours « anglais européen » d'une classe de seconde de notre lycée, avec les textes en anglais. La comparaison des résultats de nos deux expérimentations devrait donc nous permettre de discuter un peu plus avant des effets de la variable « langue ».

Nous avons vu que la difficulté de certains problèmes de logique (le nominalisme dans le chapitre « Humpty-Dumpty ») et la présence de problèmes d'interprétation ne relevant pas directement de la logique (la question de l'identité dans « Advice from a Caterpillar »), constituaient un obstacle à la dévolution. Nous avons donc, pour nos deux expérimentations, revu le choix des textes. Pour cela nous avons mené un minutieux travail de lecture des deux contes dont nous ne rendons pas compte ici. Nous avons été attentive à ce que les textes soient tous d'une longueur

similaire, à ce que chaque texte puisse être lu de manière autonome, et à ce que dans chaque texte un problème concernant l'implication logique puisse émerger de l'interprétation. Le corpus, nous l'avons vu, n'est pas homogène du point de vue de la nature des problèmes posés : nous pourrions donc étudier les effets de cette variable grâce à la confrontation avec la contingence dans nos deux expérimentations.

Dans les deux classes nous avons donné une consigne¹¹ spécifique à chaque texte, en désignant un passage précis ou, au moins, un problème précis. Cependant, pour les étudiants de CPES, nous avons ajouté une consigne générale leur laissant la liberté d'identifier et de traiter un ou plusieurs autres problèmes. Cette consigne générale est assez semblable à celle que nous avons donnée, à l'oral, lors de notre pré-expérimentation. En seconde en revanche, la consigne commune était d'une autre nature : chaque groupe pouvait proposer une petite mise en scène pour présenter le texte, écrire un autre texte présentant le même type de problème ou « compléter » le texte qui leur était proposé, toujours en lien avec les problèmes de logique identifiés. Nous avons fait ces deux choix bien différents pour tenir compte du niveau de chaque classe (nous avons postulé que la tâche « identifier un passage de type argumentatif » pouvait constituer un obstacle cognitif à la dévolution en seconde), mais aussi de la taille des groupes (en seconde, les groupes étaient constitués de 6 élèves, nous leur avons donc donné la possibilité de se répartir en deux « sous-groupes » pour faciliter le travail en dehors de la classe).

La pluridisciplinarité est une caractéristique intrinsèque de la situation que nous proposons. Cependant, sur ce point, nos deux expérimentations diffèrent quelque peu. Pour la classe de CPES, la séance d'exposés a eu lieu pendant le cours de mathématiques et, nous l'avons dit, les textes étaient en français. Les disciplines engagées sont donc, dans le cas de la CPES, les mathématiques et la littérature, avec une plus grande place faite aux mathématiques (d'un point de vue institutionnel au moins). Alors que pour la classe de seconde les trois séances se sont tenues pendant le cours d'anglais (et pas de mathématiques comme discipline non linguistique par exemple). Nous faisons l'hypothèse que cela a une influence sur le contrat didactique. Cependant, dans les deux cas nous nous sommes présentée comme professeure de mathématiques, et en CPES leur propre professeure n'était pas présente, alors que leur professeure de français a assisté aux exposés (et avait prévenu les élèves quelques jours avant). L'analyse de nos observations en ce qui concerne l'influence du cadre institutionnel devra en tenir compte.

A chaque mise en œuvre de la situation nous avons explicitement dit que notre objectif était de travailler sur la logique. Comme lors de notre pré-expérimentation, nous avons en premier lieu demandé aux étudiants de CPES de nous dire ce que cela leur évoquait, nous ne l'avons pas fait en seconde. Ici encore, la différence entre les deux expérimentations nous permettra de discuter de l'effet éventuel de cette variable. Ajoutons à cela que nous avons rédigé un document d'accompagnement, intitulé « Une œuvre dans son contexte »¹², ce document contient un petit paragraphe sur la logique pendant l'ère victorienne.

L'organisation du temps de travail des élèves a été aussi différente dans nos deux expérimentations : nous l'avons dit, en CPES, nous n'avons pu disposer que d'une séance de deux

¹¹ Les consignes données à chaque classe se trouvent en annexe : C6 pour la CPES et D6 pour la classe de seconde.

¹² Ce document est en annexe C5 et D5. Il est identique pour les deux classes.

heures. Les élèves ont donc travaillé en temps libre, en dehors de la présence des professeurs. Nous leur avons proposé de les rencontrer en dehors des cours s'ils en éprouvaient le besoin, mais ils ne nous ont pas sollicités. Pour la classe de seconde en revanche, nous avons organisé trois séances d'une heure. Lors de la première séance nous avons présenté l'activité, réparti les textes, et prévu un temps de lecture et de discussion au sein de chaque groupe. La deuxième séance a été consacrée à la présentation des exposés. Nous avons pris totalement en charge le contenu de la troisième séance en présentant une synthèse du travail de l'ensemble des groupes. La confrontation à la contingence nous permettra de d'étayer ou de réfuter notre hypothèse selon laquelle, commencer le travail en classe permet une meilleure dévolution.

Comme nous l'avons déjà dit, dans toutes nos mises en œuvre, chaque groupe d'élève devait étudier un texte différent. Bien que n'ayant pas d'élément de comparaison pour cette variable, nous pourrions tirer de nos observations certaines hypothèses sur ses effets.

III-4- Milieu de référence

Le milieu de référence est celui d'une situation de formulation, étant données les conditions de nos expérimentations, nous avons choisi de ne pas distinguer action et formulation, les éléments étudiés ici relèvent donc de ces deux phases du travail (a-didactique) des élèves.

Lors de la construction du milieu matériel, nous avons décidé de confier l'étude de chaque texte à un petit groupe d'élèves (3 élèves par groupe en CPES, 6 élèves par groupe en seconde). Cette organisation a pour objectif de faire naître des débats au sein de chaque groupe à propos des interprétations possibles : plus le nombre d'élèves est grand, plus l'émergence de plusieurs interprétations est probable. D'un autre côté, plus les élèves sont nombreux à participer au débat, plus il est difficile à organiser, d'autant qu'une grande partie du travail s'est déroulée en dehors de la classe. C'est l'une des raisons qui nous a motivées à proposer que, en seconde, les groupes se scindent en deux. Chaque élève doit donc d'abord formuler ses idées afin d'être compris des autres membres de son groupe. Le fait que les problèmes proposés soient ouverts (nous avons vu que plusieurs interprétations peuvent être faites de chaque texte) et de nature inhabituelle pour un travail en classe, doit éviter que l'un des élèves impose son point de vue sans que les autres ne le discutent. Notre choix de scénarisation doit donc permettre de réels débats au sein des groupes. Le temps de questions prévu après chaque exposé peut lui aussi faire naître des débats, cependant, les élèves auront peut-être des difficultés à formuler des questions ou des objections à propos d'une interprétation d'un texte qu'ils n'auront certainement pas lu. On peut par contre s'attendre à des demandes d'éclaircissement de certains points.

Nous faisons l'hypothèse que la pluridisciplinarité explicite de la situation incitera les élèves à mobiliser les méthodes, les notions et le vocabulaire des deux ou trois disciplines en présence (mathématiques, langue et/ou littérature). En ce qui concerne les disciplines « anglais » et « littérature », l'état actuel de notre travail ne nous permet pas de donner d'éléments précis. Pour les mathématiques, nous avons interrogés, de manière informelle, les deux professeurs de CPES. Ces deux professeurs sont, pour l'un, professeur en classe préparatoire scientifique et, pour l'autre, professeure en lycée. Ils me disent tous les deux qu'avec les élèves (de CPES), ils n'insistent pas sur la

distinction entre « si P alors Q » et « P donc Q » et qu'ils n'ont pas eu de réelle occasion de discuter du cas de la prémisse fautive dans une implication¹³. Ces déclarations nous laissent prévoir que, dans les deux classes, le vocabulaire employé pour résoudre les problèmes liés à l'implication matérielle relèvera plutôt du langage courant que du langage de la logique formelle, sauf pour les textes qui se placent dans le cadre du raisonnement déductif. Toujours selon les professeurs de la classe, les notions de réciproque et de contraposée ne sont maîtrisées que par les quelques étudiants qui envisagent de poursuivre leurs études en classe préparatoire scientifique et les notions de condition nécessaire et condition suffisante ne sont pas ou très peu utilisées en classe. En seconde, les élèves sont regroupés pour l'anglais-européen, mais proviennent de 6 classes différentes, il ne nous a donc pas été possible de savoir ce que chaque élève pouvait avoir à sa disposition. Cependant, les déclarations des deux professeurs de CPES coïncident avec les observations faites dans Deloustal-Jorrand (2001), nous pouvons donc considérer qu'elles s'appliquent aussi aux élèves de seconde.

Nous faisons l'hypothèse que le vocabulaire mobilisé par les élèves relèvera surtout du langage courant et du raisonnement déductif. Notre analyse des textes nous permet cependant de penser que, dans certains cas au moins, les élèves devront s'engager dans un travail de modélisation du langage courant afin d'exprimer les règles que le *nonsense* met à mal.

III-5- De la difficulté d'obtenir un milieu pour la validation

La phase de validation en ce qui concerne la logique nous semble difficile à obtenir sans phase didactique préalable. Il s'agit en effet de produire des preuves, or la logique est le moyen de contrôler les preuves, ce qui nous amène à un raisonnement circulaire. Nous ne prétendons pas qu'il est impossible d'organiser une phase a-didactique de validation pour la logique, mais nous avons d'emblée écarté ce problème de notre étude.

Nous avons donc organisé une phase didactique de validation, en présentant dans chaque classe une synthèse des points abordés dans les exposés. Nous avons pour cela à notre disposition notre propre travail d'analyse des textes, tout ce qui avait été dit en classe par les élèves (exposés, questions, remarques...), mais aussi, bien sûr, nos propres connaissances (et représentations) sur la logique. A ce propos, nous souhaitons souligner qu'en tant que professeure, nous avons été élève puis étudiante et, à ce titre, notre « formation » en logique correspond aux analyses que nous avons déjà présentées de l'enseignement tel qu'il est habituellement mené en France. Dès le début de notre carrière, nous avons été confrontée à des questions d'étudiants face auxquelles nous nous sentions désarmée : par exemple, la distinction entre « si P alors Q » et « P donc Q » n'a pas toujours été évidente pour nous dans notre pratique avec les élèves. Pourtant, il nous semblait que ces questions étaient tout à fait pertinentes et que ne pas leur apporter de réponse pouvait constituer un obstacle à la compréhension de ce que sont une définition, un théorème, une démonstration... et plus généralement à l'activité mathématique de nos élèves. Nous avons trouvé des réponses en discutant avec des collègues, puis dans des travaux de didactique de la logique. En choisissant une situation à dimension pluridisciplinaire, notre tâche s'est encore amplifiée en ajoutant une dimension

¹³ L'un des deux a évoqué ce cas avec une partie des étudiants en dressant la table de vérité de l'implication matérielle sans s'y attarder.

historique et culturelle à notre réflexion. Nous nous sommes donc aussi servie de nos lectures sur l'histoire de la logique et sur le *nonsense* et, là encore, d'échanges fructueux avec certains collègues.

Ajoutons que, puisque les élèves ont majoritairement exprimé leurs idées dans le cadre du langage courant, il n'a pas toujours été facile d'identifier les connaissances qu'ils ont utilisées pour traiter les problèmes qui leur étaient proposés. Le principal risque dans ces circonstances est de produire un effet de contrat que G. Brousseau nomme *effet Jourdain*¹⁴. En d'autres termes, on risque de reconnaître des connaissances là où elles ne sont pas.

Nous pensons que les difficultés que nous avons rencontrées pour aboutir à une validation didactique du travail des élèves ne nous sont pas propres et cela devra être pris en compte pour envisager la reproductibilité de la situation.

III-6- Obstacles prévus

Nous pouvons prévoir deux types d'obstacles au moment de la mise en œuvre de la situation : des obstacles d'ordre épistémologique, liés aux connaissances, et des obstacles d'ordre didactiques, en particulier en ce qui concerne la dévolution.

Rappelons ce que nous avons déjà dit à propos de la dévolution : elle repose sur un contrat de lecture (les élèves doivent prendre la responsabilité du problème de l'interprétation des textes) et un contrat didactique (il s'agit d'un travail sur la logique). Le premier est implicite pour les élèves, le second au contraire a été explicité. Les élèves peuvent rencontrer des obstacles pour prendre la responsabilité de l'interprétation (INT2 au sens de Tauveron (1999)) des textes pour deux raisons au moins : d'une part, un tel travail nécessite une compréhension du texte et d'autre part, ce contrat va à l'encontre des représentations des élèves sur ce qu'on attend d'eux en mathématiques. En effet, les élèves pensent souvent qu'en mathématiques il y a une et une seule réponse aux problèmes posés, cette représentation ne permettrait pas aux débats de s'installer, puisqu'au lieu de confronter leurs points de vue, les élèves chercheraient à savoir lequel d'entre eux a LA bonne réponse.

Nous avons aussi évoqué les difficultés que les élèves éprouvent à la fin du lycée et au début du supérieur en ce qui concerne la logique, dues à la complexité des concepts. En premier lieu, nous avons souligné que la logique est une modélisation du langage courant. Or, l'activité de modélisation nécessite de prendre du recul par rapport au réel, de faire des choix (que garde-t-on de la situation initiale ?), et cela pose des difficultés cognitives. Par ailleurs, nous avons montré en référence aux travaux de V. Durand-Guerrier, que le travail sur l'implication logique, en particulier dans son articulation avec l'implication du langage courant, passe par un double contrôle sémantique/syntaxique. Le contrôle sémantique étant dominant dans le langage courant, et le contrôle syntaxique étant souvent perçu comme suffisant dans l'enseignement de la logique. Il s'agit donc pour les élèves de faire jouer le double contrôle. Nous avons montré dans notre analyse des

¹⁴ « Le professeur, pour éviter le débat de connaissance avec l'élève et éventuellement le constat d'échec, admet de reconnaître l'indice d'une connaissance savante dans les comportements ou dans les réponses de l'élève, bien qu'elles soient en fait motivées par des causes et des significations banales » (Brousseau (2010), p. 7)

textes que les deux aspects sémantiques et syntaxiques sont présents, cependant, on peut prévoir que les élèves se limitent au contrôle sémantique, d'autant que les effets de *nonsense* liés aux jeux de mots sont omniprésents dans les contes de L. Carroll.

III-7- Observables

Pour chacune de nos deux expérimentations, nous avons enregistré les exposés des élèves et, pour la classe de seconde, nous avons récupéré les diaporamas utilisés pendant les exposés. La retranscription exhaustive des enregistrements, ainsi que les diaporamas se trouvent en annexe du présent mémoire.

Notre étude est qualitative : nous n'avons mis en œuvre notre situation que dans deux classes, *a fortiori* des classes à effectifs réduits (12 étudiants en CPES, 24 élèves en seconde). Les choix différents pour les valeurs des variables de la situation pour les deux expérimentations doivent nous permettre d'affiner certaines de nos hypothèses et d'en infirmer d'autres.

IV- Déroulement effectif et analyse *a posteriori*

IV-1- analyse « clinique »

Il s'agit ici de déterminer si les acteurs de la situation se sont comportés comme prévu. Dans l'organisation prévue, les principaux acteurs de la situation sont les élèves. Nous verrons cependant aussi un ou deux points concernant les professeurs.

Le travail semble avoir été fait en groupe, sauf pour les deux groupes 4 qui, de manière assez évidente ont travaillé individuellement en se répartissant le travail préalablement. En CPES, le groupe 4 était constitué de trois étudiants, dont un étudiant bègue, il n'avait partagé son travail avec personne et ne voulait le communiquer à tout prix, nous n'avions pas prévu qu'un élève puisse être mis en difficulté par l'exercice oral. Par ailleurs, en seconde, tous les élèves ont souhaité participer aux exposés, alors que nous leur avons suggéré de ne confier cette tâche qu'à la moitié du groupe pour faciliter l'organisation travail en dehors de la classe.

D'une manière générale, le niveau de langue et la maîtrise de l'exercice oral ont été de bien meilleure qualité en seconde. Nous avons envisagé cette situation comme une situation de formulation, nous devons donc ajouter une variable cognitive pour prendre en compte les compétences orales prévisibles des élèves : pour une classe constituée d'élèves d'un bon niveau et qui sont habitués aux exercices oraux la scénarisation adoptée en seconde semble convenir. En revanche dans le cas d'une classe pour laquelle on peut prévoir des difficultés d'expression orale, nous pensons, à la lumière de nos résultats, que l'organisation d'une alternance entre phases d'action et de formulation pourrait permettre une meilleure « formulation » finale.

Globalement, la dévolution de la situation d'action a été beaucoup plus satisfaisante que lors de notre pré-expérimentation : l'explicitation de consignes écrites, l'identification d'un problème

prise en charge par le milieu matériel, a permis que tous les groupes d'élèves s'engagent dans un travail sur l'argumentation. Cependant, nous le verrons plus précisément lors de l'analyse théorique, si la dévolution du travail d'interprétation a été assurée pour tous les groupes (sauf peut-être pour le groupe 3 de la classe de seconde), l'entrée dans un travail sur la logique n'est pas aussi homogène.

En ce qui concerne les professeurs : la professeure d'anglais de la classe de seconde, a pris l'initiative lors de la première séance, de suggérer aux élèves de faire des « relevés de mots ». Cette tâche, en partie suggérée par la consigne, est une tâche habituelle en cours de langue. Cette directive a permis que tous les groupes s'engagent dans un travail de lecture « fine » du texte. C'est donc un élément que l'on pourrait ajouter aux consignes, afin que les élèves se placent dans le cadre du contrat didactique de langue. Le traitement des mots entre les deux classes a été très différents : en classe de seconde la plupart des groupes ont utilisés des arguments grammaticaux (« phrase affirmative », « impératif », « mot interrogatif en 'wh' », ...) alors que ce type d'argument n'a été explicité par aucun groupe en CPES. Cette différence a plusieurs explications possibles. Nous faisons l'hypothèse que la cause principale est la dimension pluridisciplinaire plus forte en seconde, cela vient étayer notre hypothèse selon laquelle, face à un problème en langue étrangère, les élèves sont plus attentifs à la structure de la langue. Nous émettons tout de même une réserve en raison de la différence de maîtrise du langage entre les deux classes dont nous avons déjà parlé.

En ce qui concerne l'analyse « clinique », nous retenons donc que, dans la perspective d'une nouvelle mise en œuvre, nous devons prévoir un temps de travail en classe plus important, afin de nous assurer du bon fonctionnement de chaque groupe. Nous devons aussi prendre en compte le niveau de maîtrise de la langue (d'exposition) des élèves en organisant des phases plus courtes, mais en prévoyant une alternance action/formulation. Enfin, la dimension pluridisciplinaire semble jouer un rôle vraiment important et positif dans la dévolution, nous devons donc poursuivre nos recherches dans ce sens.

IV-2- Analyse théorique

Il s'agit dans cette partie d'identifier les connaissances qui ont été mobilisées, les aspects de l'implication logique qui ont été travaillés et ceux qui, au contraire, ont été négligés. Nous procédons, comme pour l'analyse *a priori*, texte par texte, puis nous faisons une synthèse de nos résultats et des conséquences que nous en tirons.

IV-2-(a) Texte 1

Les deux groupes, comme nous l'avions prévu, se sont placés dans le cadre du raisonnement déductif, et ont fait jouer un double contrôle syntaxique et sémantique. Cependant, en CPES, les étudiants ont utilisé la notion de syllogisme, alors qu'en seconde les élèves se sont placés dans le cadre du raisonnement déductif tel qu'il est habituellement utilisé en mathématiques.

Ainsi, les deux groupes ont fait un travail de modélisation du raisonnement, ce qui était l'une des choses que l'on attendait. Cependant, la connaissance des syllogismes semblent très approximative, alors que la modélisation mise en œuvre par les élèves de seconde est beaucoup plus convaincante.

Les deux groupes se sont intéressés à la prémisse « a dog growls when it's angry and... » mais ne l'ont pas abordé de la même manière. Notons que la traduction française que nous avons utilisée, traduit le « a », non pas par « un » qui renverrait à un élément générique aussi, mais par « les » qui est une quantification universelle explicite. Cependant, dans les deux groupes, le problème de l'univers du discours a été abordé : en CPES « les chats ne sont pas des chiens donc ce n'est pas comparable » et en seconde, les élèves ont précisé le domaine de quantification en introduisant l'ensemble des êtres vivants.

Les deux groupes ont explicitement distingué le problème de la vérité des prémisses et celui de la validité des inférences : « prémisse fausse » et « syllogisme faux » en CPES, « principe de départ pas forcément vrai » et « transformation d'un 'si' en 'si et seulement si' » pour les élèves de seconde, qui ont même souligné que ça posait le problème de la « réciproque ».

Aucun des deux groupes n'a abordé le problème de la négation de « P et Q », ni le Modus Tollens que nous avons repéré. Ces deux problèmes sont moins apparents que celui du raisonnement déductif du Chat, cela peut donc être un effet du contrat de lecture. Ajoutons que le Modus Tollens est rarement utilisé en classe, ce qui le rend difficilement mobilisable par les élèves.

Conformément à nos prévisions, les élèves se sont placés dans le cadre du raisonnement déductif, mais nous n'avions pas prévu l'émergence des syllogismes. Cette connaissance a été mobilisée à juste titre, mais n'est pas maîtrisée ce qui a provoqué des contre-sens dans l'exposé (selon les élèves, L. Carroll condamne les syllogismes). Nous ne pouvons pas savoir s'il s'agit d'une notion déjà rencontrée par les étudiants ou d'un élément trouvé en ligne par exemple. La dévolution du principal problème s'est faite pour les deux groupes et la modélisation est explicite. Par ailleurs nous avons pris le parti de ne mener notre analyse *a priori* que sur les textes originaux en reportant à plus tard la réflexion sur les traductions. La confrontation à la contingence nous a permis ici d'identifier au moins un endroit où la traduction choisie ne conserve pas la propriété du texte du point de vue de notre situation.

IV-2-(b) Texte 2

Dans les deux classes les élèves ont insisté sur la forme des couples de phrases. Cependant, en CPES, ce point n'a pas été argumenté, alors qu'en seconde, une analyse grammaticale a été menée.

Les élèves de seconde ont, d'une certaine manière, explicité le rapport de réciprocity entre les deux phrases de chaque couple (« dans un sens et dans l'autre sens »), ce qui n'est pas le cas pour les étudiants de CPES qui se sont appuyés sur des arguments du type « on voit bien que ».

Les deux groupes ont exercé un contrôle sémantique et souligné le caractère contingent pour mettre en évidence la différence entre les deux phrases de chaque couple. Contrôle sémantique prolongé en CPES par une question à la fin de l'exposé.

Le groupe des CPES a nommé deux stratégies démonstratives : le raisonnement par l'absurde et l'utilisation de contre-exemple, mais sans jamais expliquer de quoi il s'agissait et comment cela s'organisait. A la fin de leur exposé, ces élèves évoquent la contraposée (sans avoir jamais parlé d'implication avant) et l'énoncent correctement. Par contre, la notion de réciproque n'a pas été mobilisée.

En seconde en revanche, le groupe a explicitement dit qu'il n'y avait pas ici d'argumentation.

Nous n'avions pas prévu que la notion de réciproque n'émergerait pas explicitement : comme nous pouvons le voir dans d'autres exposés, c'est un objet que les élèves des deux classes manipulent explicitement. Or, ici, les deux groupes ont identifié la « forme », mais l'un ne l'a pas nommée et l'autre s'est appuyé sur du vocabulaire du langage courant. Nous faisons l'hypothèse que cela est dû au fait que l'on ne se place pas ici dans le cadre déductif.

IV-2-(c) Texte 3

Ce texte est le seul de notre corpus pour lequel nous avons prévu le cadre ensembliste. Comme V. Deloustal-Jorrand (2004) le souligne, ce cadre est souvent négligé, alors qu'il est tout à fait propice à la manipulation d'énoncés contingents.

En CPES, l'argumentation est floue, et le vocabulaire incertain, nous ne savons pas, par exemple, comment comprendre le terme « prémisses ». Par ailleurs, ils signalent un « raisonnement logique mais faux », là encore sans vraiment expliciter ce qu'ils entendent par là. Et enfin, ils soulignent deux preuves du même résultat, mais semblent considérer que la seconde vient renforcer le résultat obtenu par la première. Nous pensons ici que le contrat didactique a eu pour effet de mobiliser du vocabulaire plus que des connaissances. Cependant, ce groupe s'est placé dans le cadre ensembliste en parlant des « caractéristiques » puis, « ça coïncide ». Ils soulignent aussi le fait que le Pigeon ne mène son argumentation que sur son observation d'Alice, alors qu'il en déduit une règle « générale ». Cependant, ils se contentent d'en faire la remarque, sans pousser plus loin la discussion. C'est un élément que nous n'avions pas prévu dans notre analyse *a priori*, mais il est intéressant puisqu'il fait intervenir la notion d'univers du discours : dans le Pays des Merveilles, Alice est la seule petite fille, cette « généralisation » de l'énoncé peut donc être légitimée.

En seconde en revanche, l'exposé est organisé et les élèves proposent d'emblée une modélisation en « si...alors... ». Nous n'avions pas prévu que ce texte permettrait l'articulation du cadre ensembliste avec celui de la logique formelle. Ce groupe va plus loin en démontrant la non équivalence entre une implication et sa réciproque à l'aide d'un exemple : ils annoncent « la réciproque n'est pas toujours vraie » puis proposent « si on est un garçon alors on aime le bleu » puis observent que dans la classe il y a des filles qui aiment le bleu, pour conclure (implicite) que l'implication « si on aime le bleu alors on est un garçon » est fautive. Ce groupe a donc mobilisé des

connaissances importantes sur l'implication matérielle et sur l'implication formelle : pour nier (pour tout x , $Px \Rightarrow Qx$), ils utilisent la phrase ouverte ($Px \Rightarrow Qx$) et la notion de contre-exemple.

Toujours en seconde, les élèves ont aussi mobilisé le cadre du raisonnement déductif, ils considèrent que le faux implique le faux : « le Pigeon part d'une base fausse [...] du coup tout ce qu'il va dire sera faux ».

Les deux groupes ont insisté sur le fait qu'Alice elle-même était déstabilisée par son apparence.

IV-2-(d) Texte 4

Sur ce texte c'est le groupe des secondes qui a éprouvé le plus de difficultés : leur compréhension du texte est erronée, ils ont considéré que la Reine Blanche était l'alliée d'Alice dans ce passage. Cependant, ce n'est pas nécessairement un obstacle pour le problème qu'on se propose de résoudre ici puisque les arguments sont essentiellement échangés entre Alice et la Reine Rouge. Ces élèves ont proposé une analyse linéaire du texte basée sur des relevés de mots : leurs choix sont pertinents, leurs analyses grammaticales intéressantes, mais ils n'ont pas fait de commentaire sur la globalité du passage à étudier. La dévolution du problème d'interprétation n'a pas eu lieu comme nous l'avions prévu. Cependant, c'est le seul groupe qui a proposé un travail d'écriture comme cela avait été proposé. Le texte qu'ils ont écrit, qui présente une défense d'Alice face à la Reine, repose essentiellement sur les systèmes de valeurs du Pays des Merveilles et de l'endroit d'où vient Alice. Il y a donc bien eu là un travail d'interprétation critique, par contre, c'est la dévolution du problème de logique qui n'a pas eu lieu.

En CPES, le raisonnement par récurrence que nous avons identifié a été repéré. Mais comme dans beaucoup d'autres exposés, l'analyse n'est pas menée à son terme, en particulier, le problème de l'initialisation n'est pas traité. Ce groupe aussi affirme que l'on doit partir du « vrai » pour raisonner, un étudiant extérieur au groupe défend d'ailleurs ce point de vue au moment des questions.

Dans aucun des deux groupes le cadre de la logique formelle n'a fonctionné.

IV-2-(e) synthèse des résultats

La modélisation du langage courant par la logique a été prise en charge de manière plus significative par les élèves de seconde que par les étudiants de CPES. Nous avons souligné plus haut que les deux classes n'avaient pas du tout les mêmes compétences langagières, cependant, nous faisons l'hypothèse que ce n'est pas la seule explication et qu'on peut voir dans cette différence un effet de la mise en place des nouveaux programmes (les CPES n'étaient pas concernés par ces programmes).

Le cadre de la logique formelle s'est constitué en obstacle pour l'étude des textes 2 et 4. Quand il n'y a pas d'inférence, les élèves ne semblent pas identifier les énoncés conditionnels. La professeure d'anglais de la classe de seconde nous a demandé à la fin de la séance d'exposés, si ce serait pertinent de prendre en compte les différents modes utilisés dans les phrases avec « if ». Comme nous l'avons dit dans notre analyse *a priori* ce problème devrait effectivement permettre de discuter de la distance entre la logique formelle et la logique du langage courant.

Dans le cadre du raisonnement déductif, les élèves tentent de formuler la distinction entre vérité et validité. Cela a en général été induit par la contingence et la conception selon laquelle avec du faux on ne peut pas raisonner : quand le contrôle sémantique est exclu ou écarté, il reste la « forme » du raisonnement.

D'une manière générale, la contingence a été traitée par les élèves, et quelques groupes ont même pris en charge la détermination d'un univers du discours.

Conclusion

Sur la base de considérations épistémologiques, historiques, littéraires et didactiques, nous avons postulé que l'on pouvait organiser une situation permettant de travailler certains éléments de logique avec des élèves de chaque côté de la transition lycée-supérieur sur la base de textes extraits des deux contes *Alice's Adventures in Wonderland* et *Through the Looking Glass* de Lewis Carroll. Au cours de notre travail d'analyse et de construction des différents milieux nous avons fait plusieurs hypothèses concernant le fonctionnement d'une telle situation. Hypothèses que nous avons confrontées à la contingence grâce à deux expérimentations.

Le caractère inhabituel de l'utilisation de textes de fiction pour des situations d'apprentissage en mathématiques, en particulier à ce niveau, pose la question d'un contrat spécifique. Nous avons choisi le modèle de C. Tauveron (1999) associé au lecteur modèle d'U. Eco (pour saisir la nature de l'activité de lecture des élèves : ce cadre nous a permis d'identifier certains problèmes pour la dévolution, en particulier d'identifier que l'activité des élèves relevait plutôt de la compréhension (soutenue par un premier processus d'interprétation) que de l'interprétation critique (Eco (1992)) comme nous l'attendions. Nous avons observé, en classe de langue, que d'autres éléments pouvaient être pris en compte, comme l'habitude de faire des relevés de mots ou de faire une analyse grammaticale des phrases. Au cours de notre expérimentation, cela à, à la fois favorisé la dévolution, mais aussi constitué un obstacle pour certains qui n'ont pas dépassé ce stade de l'analyse grammaticale. Dans une perspective pluridisciplinaire, un travail plus poussé sur l'association de plusieurs contrats (de lecture, didactique des langues, didactique des mathématiques) pourrait amener de nouveaux résultats.

Les deux contes de Lewis Carroll ont souvent inspirés les logiciens, mais ce n'est pas une justification suffisante pour prévoir qu'ils pourront fonctionner comme une situation didactique pour l'apprentissage de la logique. En revanche, nous avons montré que le *nonsense*, tel que le pratique Lewis Carroll, déstabilise le lecteur, en particulier par des jeux avec la logique. Nous avons ainsi pu extraire des deux contes *Alice* quelques textes dans lesquels nous reconnaissons des problèmes qui questionnent le concept d'implication logique et son rapport à l'implication du langage courant. Ces

textes sont au cœur de la situation que nous avons construite et mises en œuvre ici. Nos observations nous ont permis de mettre en évidence des difficultés de dévolution de certains de ces problèmes, en particulier dans le cadre de la logique formelle. D'autres mises en œuvre devront donc être organisées, en faisant d'autres choix de scénarisation, pour permettre une meilleure dévolution des problèmes de logique aux élèves, mais aussi une meilleure articulation action/formulation : les bons résultats que nous avons obtenus avec certains groupes nous laissent penser qu'en organisant mieux les débats sur les textes, cela induirait un plus grand effort de formulation chez les élèves. Plusieurs variables parmi celle que nous avons dégagées peuvent nous permettre de contrôler cela : on peut par exemple donner le même texte à toute la classe, ou encore ajouter une dimension au « jeu » en prévoyant de donner le même texte à deux groupes qui devront régulièrement confronter leurs points de vue. On peut aussi envisager d'insérer des phases didactiques pendant le travail pour enrichir au fur et à mesure le milieu objectif des élèves.

Soulignons enfin que le caractère pluridisciplinaire de la situation pourrait faire obstacle à sa reproductibilité, pour le travail documentaire qu'elle demande. Cependant, nous avons déjà prévu d'autres expérimentations qui nous permettront d'affiner nos choix didactiques et de concevoir une ressource.

Bibliographie

- BLOCH I. (1999) L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en Première scientifique. *Recherche en didactique des mathématiques* **19/2**, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- BLOCH I. (2002) Différents niveaux de modèles de milieu dans la théorie des situations. *Actes de la 11^{ème} Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- BLOCH I. (2005) *Quelques apports de la Théorie des Situations à la didactique des mathématiques dans l'enseignement secondaire et supérieur*, Thèse d'Habilitation à Diriger des Recherches, Université Denis Diderot Paris 7.
- BROUSSEAU G. (1997) La Théorie des Situations Didactiques, *cours donné à l'université de Montréal*, disponible sur le site <http://guy-brousseau.com> (consulté le 11 septembre 2013)
- BROUSSEAU G. (1998) *La théorie des situations didactiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- BROUSSEAU G. (2010) Glossaire de quelques conceptions de la théorie des situations didactiques en mathématiques (1998), disponible sur le site <http://guy-brousseau.com> (consulté de 17 septembre 2013)
- COUMET E. (1972) Jeu de logique, jeux d'univers, *Lewis Carroll*, Editions de l'Herne, 1987.
- DELEUZE G. (1969) *Logique du sens*, coll. « critiques », Les Editions de Minuit, Paris.
- DELOUSTAL-JORRAND V. (2001) Implication et raisonnement mathématique, *Actes de la XI^e Ecole d'été de didactique des mathématiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- DELOUSTAL-JORRAND V. (2004) *L'implication mathématique : étude épistémologique et didactique*, Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier Grenoble I.
- DIEUDONNE M., DRONIOU J., DURAND-GUERRIER V., RAY B., THERET D. (2011) Bilan de praticiens sur la transition lycée-université. Exemple de l'algèbre linéaire, *Repères-Irem* **85**, Topiques éditions, Nancy, pp. 5-30.
- DOUADY R. (1983) Rapport enseignement-apprentissage : dialectique outil-objet, jeux de cadres, *Cahier de didactique des mathématiques* **3**.
- DURAND-GUERRIER V. (2003) Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective, *Educational Studies in Mathematics* **53**, Kluwer Academic Publishers, pp. 5-34
- DURAND-GUERRIER V. (2005) Questions de logique dans l'enseignement supérieur. Quelques pistes pour faire évoluer les pratiques enseignantes, *communication au colloque Questions de Pédagogie dans l'Enseignement Supérieur*, Lille.
- DURAND-GUERRIER V. (2008) Truth versus validity in mathematical proof, *ZDM* **40**, ed. Springer, pp. 373-384

ECO U. (1992) *Les limites de l'interprétation*, ed. Grasset, Paris.

ECO U. (1985) *Lector in fabula*, ed. Grasset, Paris, 2012.

FABERT C., GRENIER D. (2011) Une étude didactique de quelques éléments de raisonnement mathématique et de logique, *Petit x* **87**, IREM de Grenoble, pp. 31-51.

GATTEGNO J. (1966) La logique et les mots dans l'œuvre de Lewis Carroll, in *Logique sans peine*, Lewis Carroll, Hermann, Paris, 2006, pp. 9-43

LECERCLE J.-J. (1981) *Le Nonsense : genre, histoire, mythe*, Thèse de doctorat, Université Paris 7.

MARGOLINAS C. (1998) Le milieu et le contrat, concepts pour la construction et l'analyse de situations d'enseignement, in R. Noirfalise (Eds) *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques*, Actes de l'Université d'Été, La Rochelle, Juillet 1998, ed. IREM Clermont-Ferrand, pp. 3-16.

MOKTEFI A. (2007) *Déduire et Séduire : la Logique Symbolique de Lewis Carroll*, Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur, Strasbourg I.

MOKTEFI A. (2008) Lewis Carroll's logic, in M. Gabbay & J. Wood (eds.), *British Logic in the Nineteenth-Century*, coll. *Handbook of the History of logic* (vol. 4), Amsterdam, pp. 457-505.

REQUIER-ULRICH (2009) *L'évolution de l'image de l'enfant personnage et de l'enfant lecteur entre les Alice de Lewis Carroll, Le Hobbit de J.R.R. Tolkien et His dark materials de Philip Pullman*, Thèse de doctorat, Université Paul Valéry, Montpellier III.

TAUVERON (1999) Comprendre et interpréter le littéraire à l'école : du texte réticent au texte proliférant, *Repères* **19**, pp. 9-38.

TAUVERON (2004) *Lire la littérature à l'école*, Hatier pédagogique, Paris.

Œuvres de Lewis Carroll utilisées

Carroll L. (1966) *Logique sans peine*, Hermann, Paris, 2006.

Carroll L. (2000) *The annotated Alice*, ed. Martin Gardner, Penguin books, London, 2001.

Œuvres (1990) *Lewis Carroll. Œuvres*, coll. La Pleiade, Gallimard, Paris.

Programme officiel de seconde

Programme (2009) [Programme de mathématiques, enseignement commun, seconde générale et technologique, arrêté du 23 juin 2009 - BO n°30 du 23 juillet 2009](#)

Liste des annexes

Annexe A : Schéma de structuration du milieu (Bloch(2002), p. 13)

Annexe B : Corpus utilisé lors de la pré-expérimentation

Annexe B1 : « Advice from a Caterpillar »

Annexe B2 : « Pig and Pepper »

Annexe B3 : « A Mad Tea Party »

Annexe B4 : « The Mock Turtle's Story »

Annexe B5 : « Humpty Dumpty »

Annexe B6 : « Queen Alice »

Annexe C : Expérimentation CPES

Les textes utilisés ici sont en français : traduction d'H. Parisot (Œuvres (1990))

Annexe C1 : texte 1, extrait de « Cochon et Poivre », *Les aventures d'Alice au pays des merveilles*, chap. 6

Annexe C2 : texte 2, extrait de « Un thé chez les fous », *Les aventures d'Alice au pays des merveilles*, chap. 7

Annexe C3 : texte 3, extrait de « Les conseils du Ver à soie », *Les aventures d'Alice au pays des merveilles*, chap. 10

Annexe C4 : texte 4, extrait de « La Reine Alice », *De l'autre côté du miroir*, chap. 9

Annexe C5 : document d'accompagnement

Annexe C6 : consignes CPES

Annexe C7 : transcription exposé texte 1

Annexe C8 : transcription exposé texte 2

Annexe C9 : transcription exposé texte 3

Annexe C10 : transcription exposé texte 4

Annexe C11 : synthèse CPES

Annexe D : Expérimentation seconde

Annexe D1 : texte 1, extrait de “Pig and Pepper”, *Alice’s adventures in Wonderland*, chap.6

Annexe D2 : texte 2, extrait de “A Mad Tea-Party”, *Alice’s adventures in Wonderland*, chap.7

Annexe D3 : texte 3, extrait de “Advice from a Caterpillar”, *Alice’s adventures in Wonderland*, chap.6

Annexe D4 : texte 4, “Queen Alice”, *Through the Looking Glass*, chap.9

Annexe D5 : document d’accompagnement

Annexe D6 : consignes seconde

Annexe D7 : diaporama exposé texte 1

Annexe D7bis : transcription exposé texte 1

Annexe D8 : diaporama exposé texte 2

Annexe D8bis : transcription exposé texte 2

Annexe D9 : diaporama exposé texte 3

Annexe D9bis : transcription exposé texte 3

Annexe D10 : diaporama exposé texte 4

Annexe D10bis : diaporama exposé texte 4bis

Annexe D11 : synthèse seconde

Résumé

Nous étudions dans ce mémoire l'apport de l'étude de quelques textes extraits d' *Alice's Adventures in Wonderland* et de *Through the Looking Glass* de Lewis Carroll en classe pour l'enseignement de la logique et de l'implication, en particulier au lycée et à la transition lycée-supérieur. Nous construisons une situation en nous appuyant sur des éléments épistémologiques, historiques et littéraires concernant la logique et Lewis Carroll puis nous organisons la confrontation à la contingence grâce aux modèles de milieux d'I. Bloch (2002), dans le cadre d'un double contrat didactique/de lecture (Brousseau (1998), Tauveron (1999)). Les résultats obtenus au cours de nos deux expérimentations, menées en classe de seconde et dans une Classe Préparatoire aux Etudes Supérieures (CPES, classe de transition entre le baccalauréat et les études supérieures) en anglais et en français, nous permet de montrer en quoi le récit *nonsensique* permet l'apparition de contradictions et déséquilibres caractéristiques du milieu de la théorie des situations didactiques.

Mots-clés : logique, implication, contingence, contrat didactique-contrat de lecture, Lewis Carroll