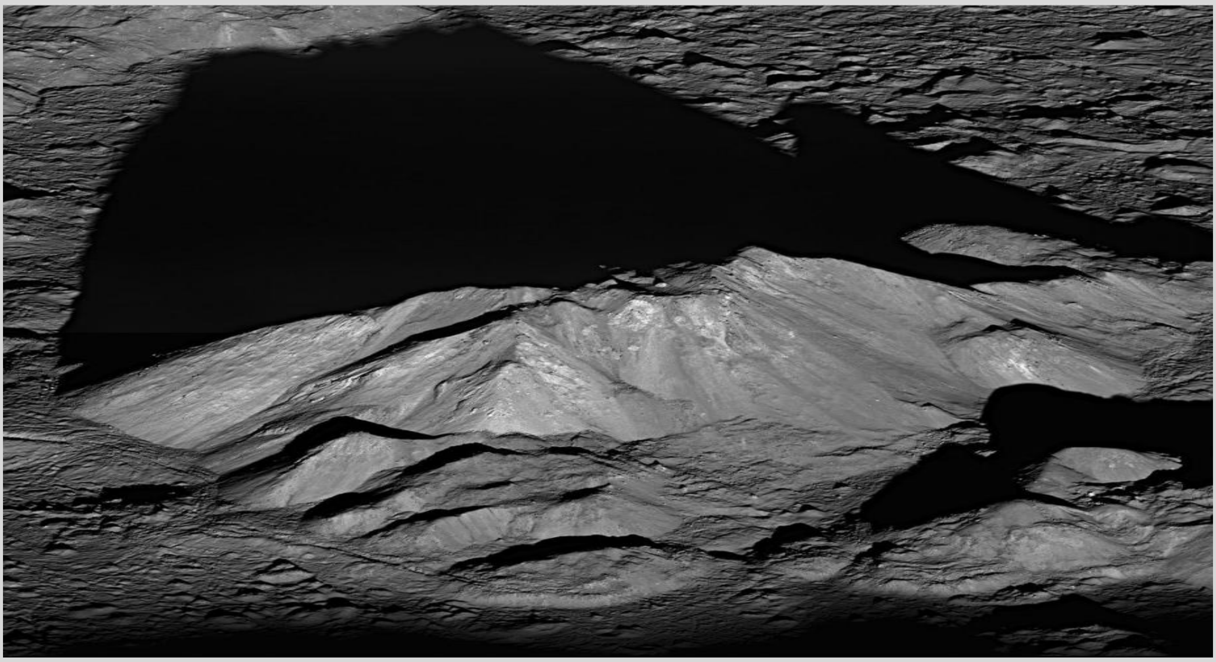
MESURE DES MONTAGNES ET DES CRATERES LUNAIRES



Le cratère TYCHO

Table des matières

Introduction

A) Mesure du diamètre d'un cratère d'après Philippe. Bœuf

B) Mesurer la hauteur d'une montagne lunaire avec *Moon* de Philippe. Bœuf

C) Méthode approchée de la différence de longitudes sélénographiques

0) les coordonnées sélénographiques

1) justification angulaire

2) projection orthogonale d'un segment

3) la colongitude du terminateur

4) le logiciel *SalsaJ* et le logiciel *Atlas virtuel de la lune*

D) Méthode de Galilée

E) Méthode de l'angle de phase ne tenant pas compte de la sphéricité de la lune

F) Méthode de l'angle de phase tenant compte de la sphéricité de la lune

Annexe A

Annexe B

Notions de mathématiques utilisées

- le théorème de Pythagore
- la trigonométrie sphérique
- la trigonométrie plane
- angles alternes internes
- les équations du second degré
- les cosinus directeurs d'un vecteur
- projection orthogonale d'un segment sur un plan
- distance de deux points en repère orthonormé de l'espace

Notions d'astronomie utilisées

- le terminateur de la lune : **N°53 MATHEMATICE**
- longitude et latitude sélénographique
- les coordonnées écliptiques
- angle de phase
- éphémérides

Les logiciels utilisés :

Cabri 3D : n'utiliser que le **navigateur Firefox ou internet explorer** et télécharger le plug-in Cabri 3D. http://www.cabri.com/fr/telecharger-cabri-3d.html

MOON http://philippe.boeuf.pagesperso-orange.fr/robert/softs/moon.zip

Atlas virtuel de la lune https://www.ap-i.net/avl/fr/start

Geogebra https://www.geogebra.org/?lang=fr

Coelix : utiliser une version gratuite de démonstration

Introduction

J’ai tenu dans cet article à présenter quelques méthodes permettant de mesurer la hauteur d’une montagne lunaire ou la profondeur d’un cratère lunaire.

Le **logiciel Moon de P.Boeuf** permet d’apprécier l’angle des rayons solaires avec le plan horizontal d’un lieu et de déterminer corrélativement la hauteur d’une montagne lunaire . La rigueur mathématique déployée pour tenir compte de la sphéricité lunaire dans la méthode de calcul de la hauteur d’une montagne lunaire par **B.Morando** est des plus instructives.

Différents logiciels seront mis à contribution tel le **logiciel Salsaj, l’atlas virtuel de la lune** ou le **logiciel Coelix** qui fourniront toutes sortes d’indications utiles sur le plan astronomique.

Le dossier sur le **terminateur de la lune N°53** permettra au lecteur de se familiariser avec cette notion qui sera évoquée dans cet exposé lors de l’utilisation de la méthode des différences de longitude sélénographiques.

Bien sûr, nous n’avons pas oublié **Galilée** qui il y a 400 ans environ déterminait magistralement la hauteur des montagnes lunaires en procédant lors d’un quartier de lune.

A) Mesurer le diamètre d'un cratère de la Lune

D'après un article de **Philippe. Bœuf** reproduit avec l'aimable autorisation de l'auteur.

Il s'agit obtenir la taille d'un cratère lunaire à partir d'une photo dont on ne voit qu'un morceau du limbe (son pourtour).

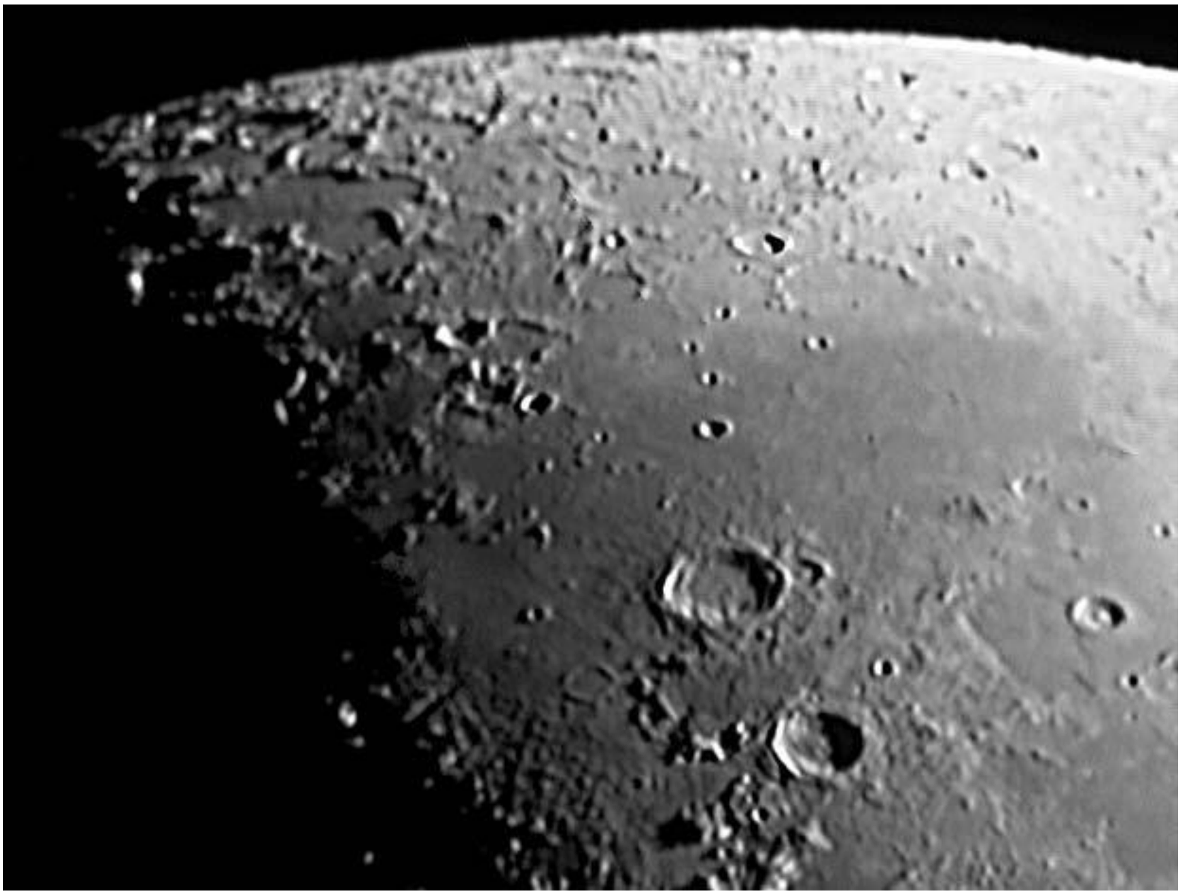


schéma 1

L'astuce sera de déterminer dans un premier temps la taille de la Lune sur l'image, à partir de la forme de son limbe. Ensuite, on comparera la taille d'un cratère mesurée sur l'image avec celle de la Lune obtenue précédemment. Le rapport des deux tailles sur l'image est le même que celui existant en réalité, le diamètre lunaire étant de **3475 km**, on aura celui du cratère.

Comment trouver le diamètre d'un cercle connaissant la forme de son limbe?

Voici notre situation: seule la portion de cercle supérieure est visible. On peut y mesurer "h" et "L" sans problème, après avoir tracé une corde quelconque sur l'image.

Si on applique le **théorème de Pythagore** dans le schéma ci-contre, on trouve :

$$R = \frac{h^2 + L^2}{2.h}$$

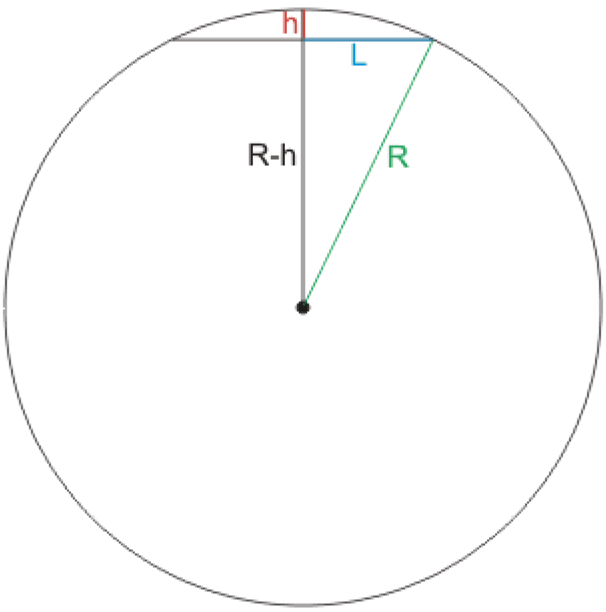


schéma 2

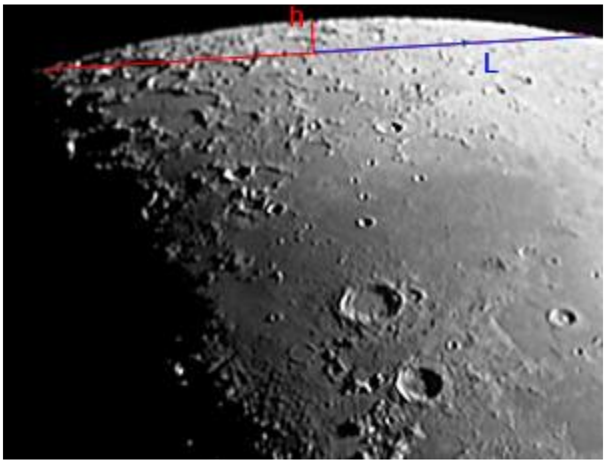


schéma 3

Par exemple, sur l'image n° 3, on mesure L = 292 pixels, h = 36 pixels

Donc R = 1202 pixels ou bien, le diamètre de la Lune sur l'image correspond à 2404 pixels (3475 km en réalité).

Quel est le diamètre d'un cratère maintenant?

Le plus gros situé sur l'image est **Aristote.** Sur la première image, on estime son diamètre (le grand axe, car à cause de son inclinaison par rapport à nous, il semble elliptique) à 62 pixels.

Une simple proportionnalité nous dit que le cratère lunaire fait en réalité:

(62 x 3475) / 2404 ≈ 90 km, alors qu'un coup d'œil dans un atlas lunaire nous indique qu'il est estimé à 88 km.

B) Mesurez la hauteur d'une montagne sur la Lune avec le **logiciel** **Moon** de **P. Bœuf** et le logiciel SalsaJ.

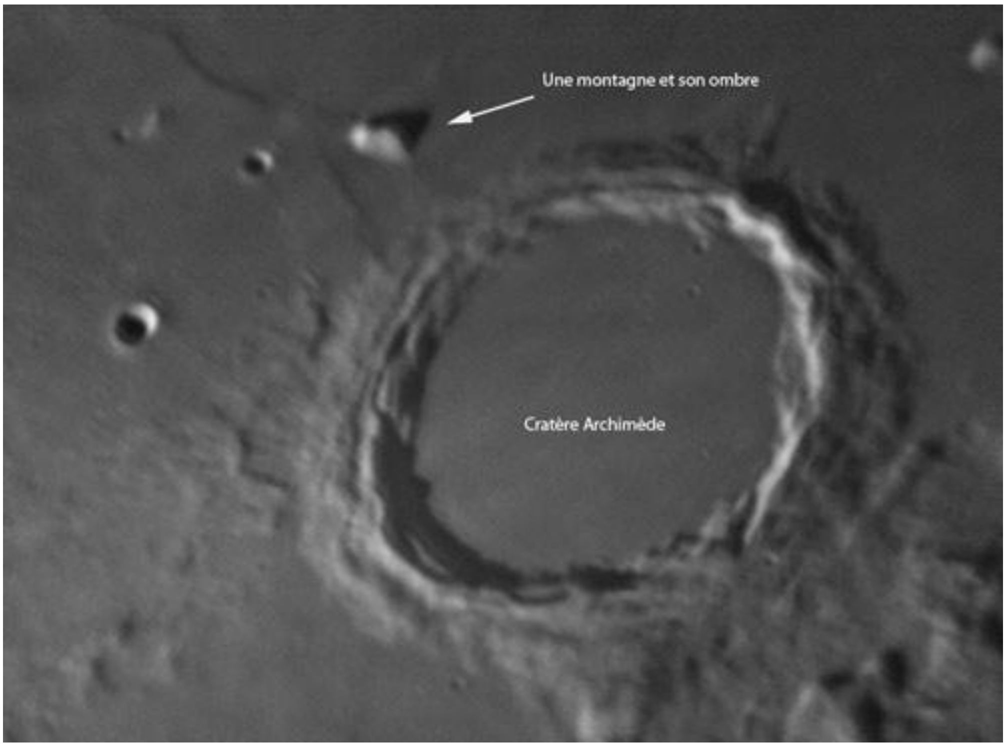


schéma 4

Voici une image du cratère **Archimède** (83 km de diamètre d'après les atlas, ce qui peut servir d'échelle). On peut s'en servir pour trouver la hauteur du pic, à condition de connaître la hauteur angulaire du Soleil à cet endroit lors de la prise de vue.

Utilisons le logiciel **SalsaJ** pour mesurer la longueur de l'ombre.

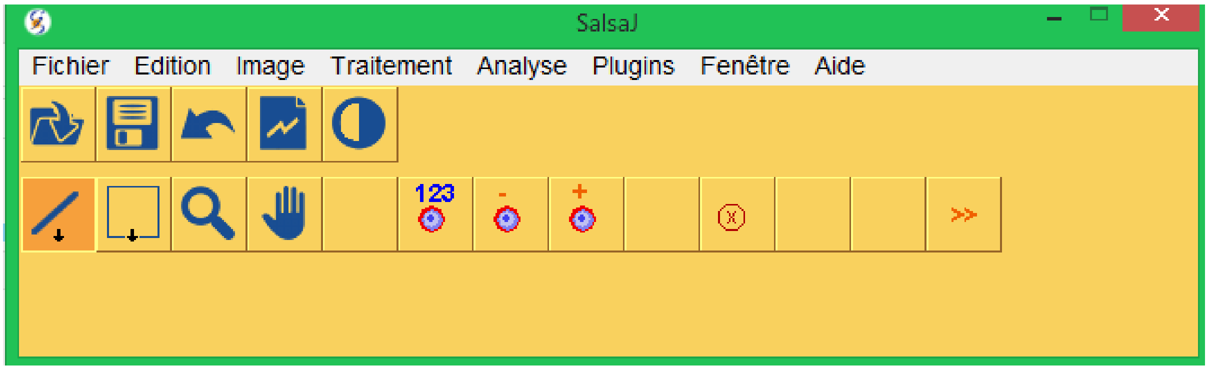


schéma 5

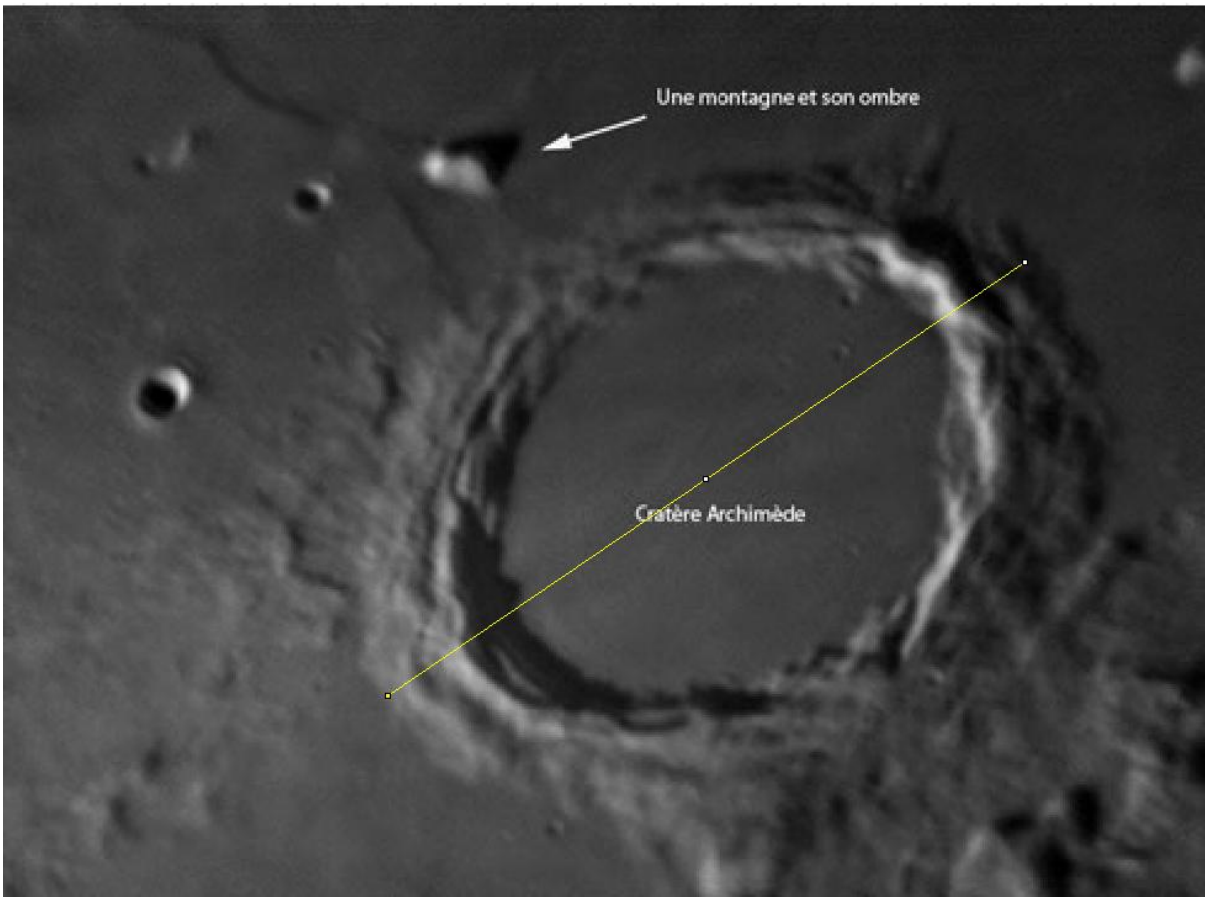


schéma 6

Spécifions l’échelle dans la rubrique analyse en exprimant que ce trait a pour longueur environ 84 Km.

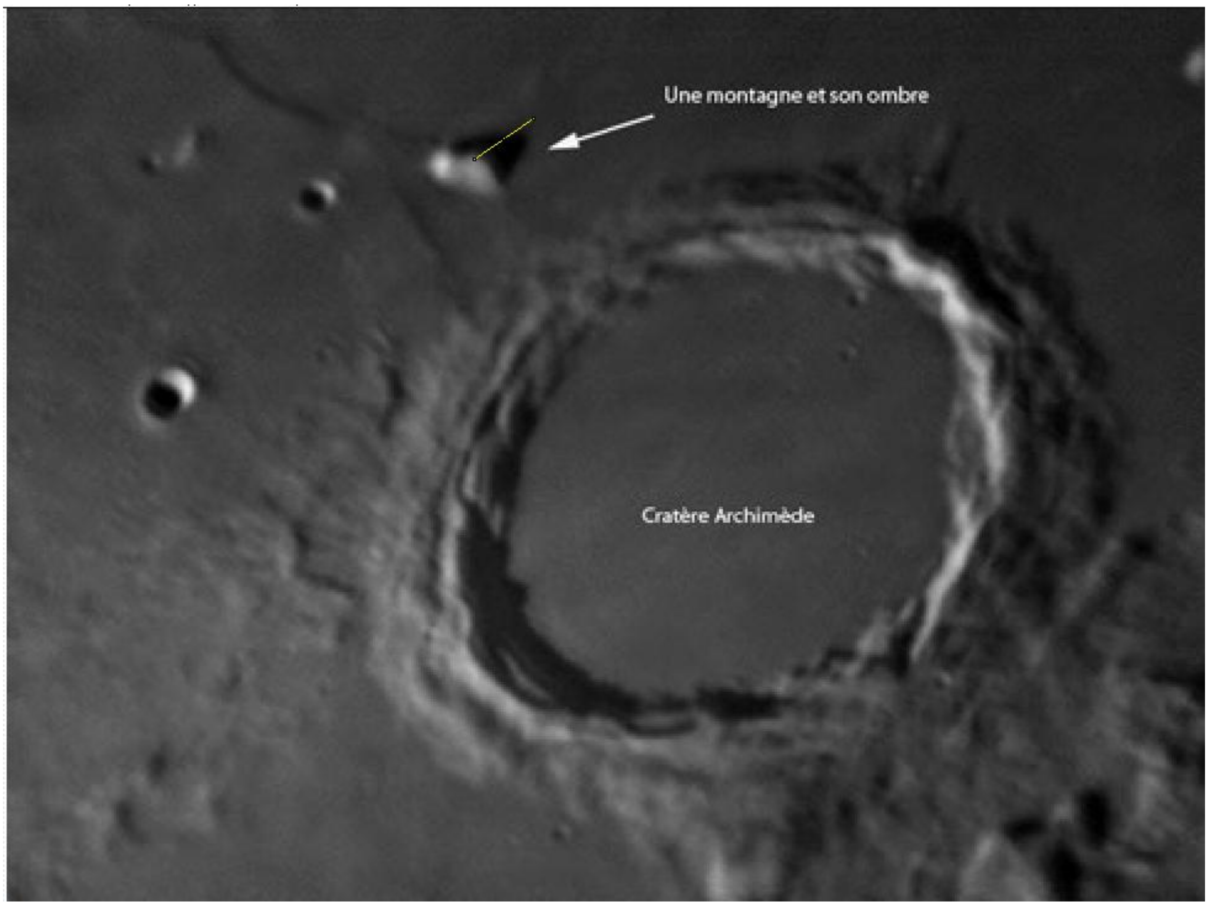


schéma 7

Le trait jaune entre le sommet de la montagne et l’extrémité de l’ombre mesure 10 cm.

Déterminons à présent la hauteur **approximative** de la montagne.

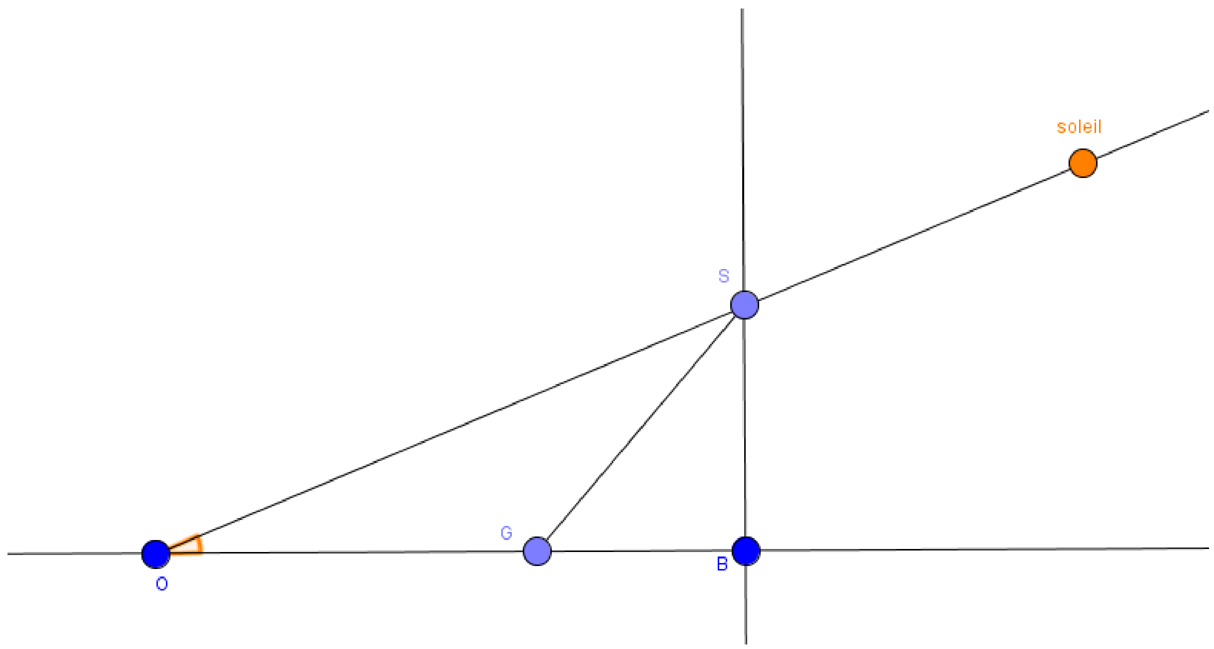


schéma 8

En effet, le Soleil est à une hauteur $a = \widehat{SOB}$, S est le sommet, B le point à la verticale du sommet, O limite de l'ombre SB=h

La hauteur de la montagne SBG est **h = SO sina**

Mais comment donc déterminer la hauteur du Soleil?

On prend en même temps une image "**grand champ**" de la Lune, où elle sera visible en entier. Cela donnera :

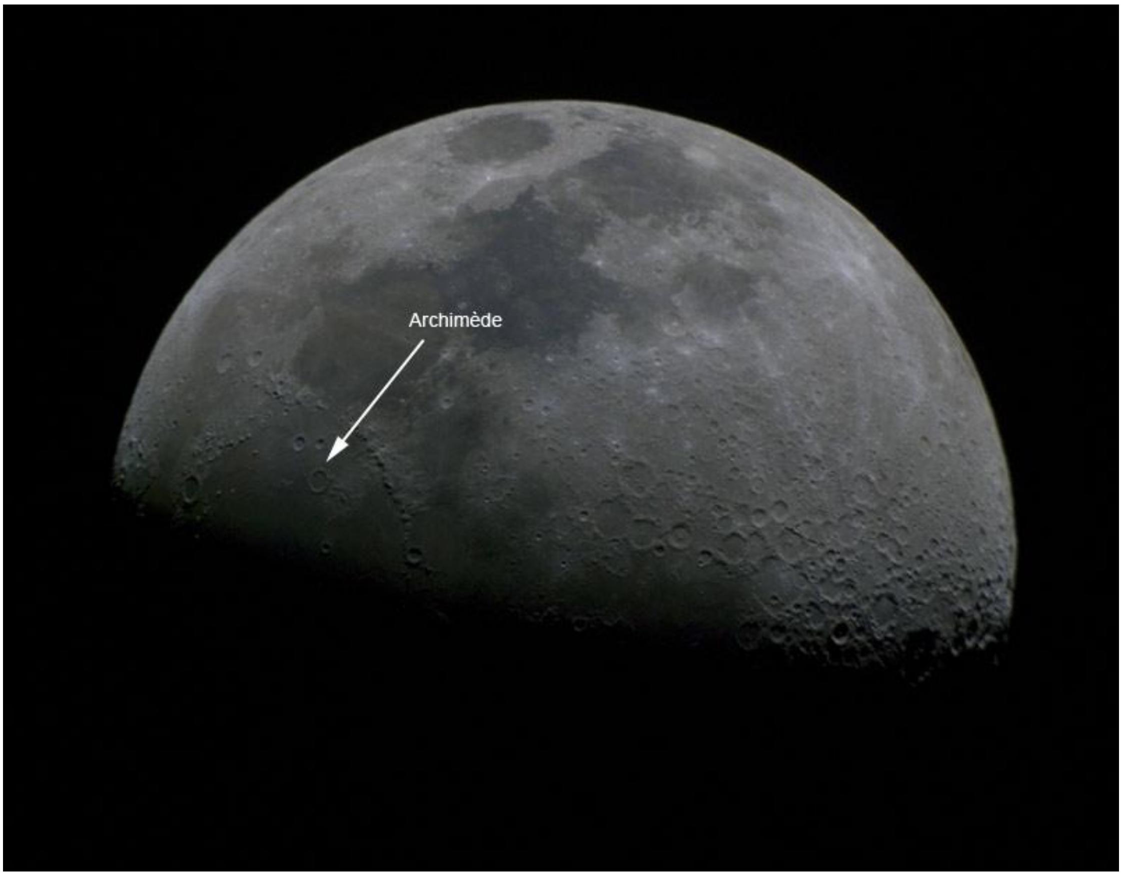


schéma 9

Le logiciel Moon produit par Philippe. Bœuf va nous fournir la hauteur du soleil.

En voici une copie d'écran concernant la situation qui nous occupe:

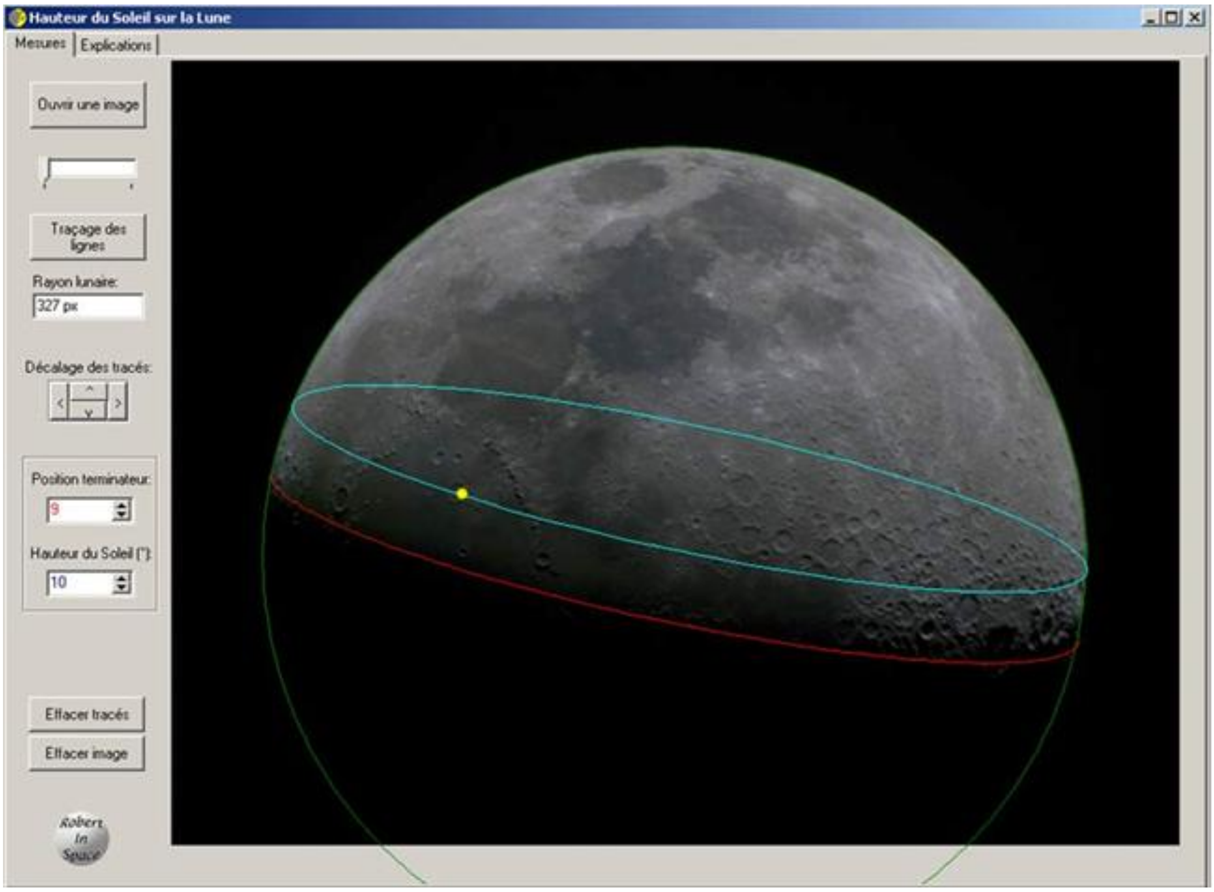


schéma 10

Ce logiciel, très simple d'utilisation, vous permet, après avoir positionné les **deux "pôles du croissant" lunaire**, de placer **le terminateur** (en rouge), et le **cercle d'égale hauteur du Soleil**: celui qui passe par le **cratère Archimède en jaune** donne une hauteur de 10° environ.

Dans ce cas :

hauteur en Km = 10 sin (10°) $\approx$ 1,75

On l'aura compris, il n'est pas facile de mesurer les ombres avec une grande précision mais on obtient tout de même une approximation honorable.

Important :

On veillera en allant sur propriétés à renseigner les rubriques de compatibilité : Ainsi avec Windows 8, il faut avoir le panneau suivant :

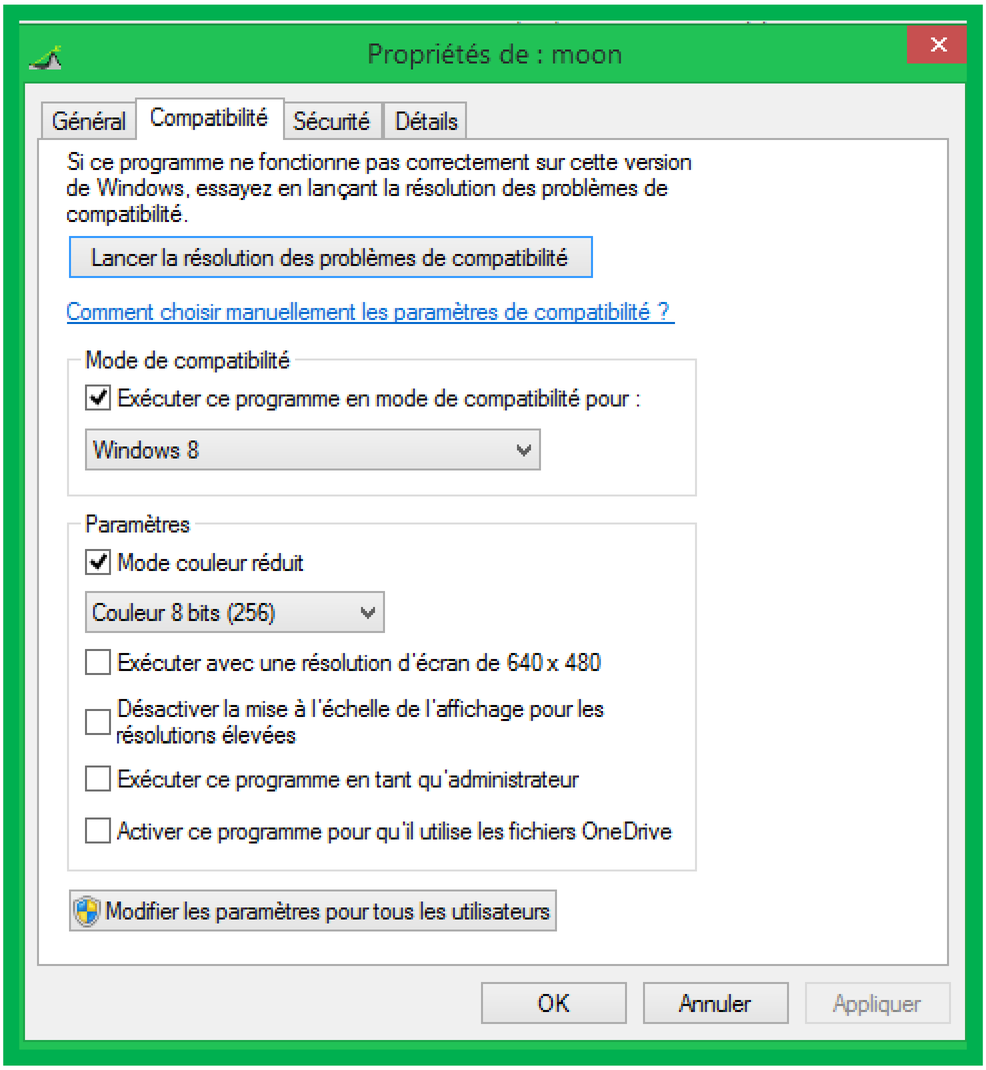


schéma 11

C) Méthode approchée des différences de longitudes sélénographiques

Les paragraphes 0 ; 1 ; 2 et 3 sont destinés à préparer le paragraphe 4.

0) Les coordonnées sélénographiques

Le cercle (C) est l'équateur lunaire.

Les coordonnées sélénographiques sont à la lune ce que sont les coordonnées géographiques à la terre.

Il existe un méridien origine en bleu par rapport auquel on mesure la longitude de m qui en valeur arithmétique est égale à la mesure de l'arc $\overset{\frown}{AM}$

La longitude est affecté du signe + à l'est et - à l'Ouest d'après les conventions de l'UAI (union astronomique internationale).

La latitude est en valeur arithmétique la mesure de l'arc $\overset{\frown}{Mm}$ et se trouve affectée du signe + dans l'hémisphère nord et - dans l'hémisphère sud.

Les expériences de télémétrie laser ont permis de bien définir ce système de coordonnées.

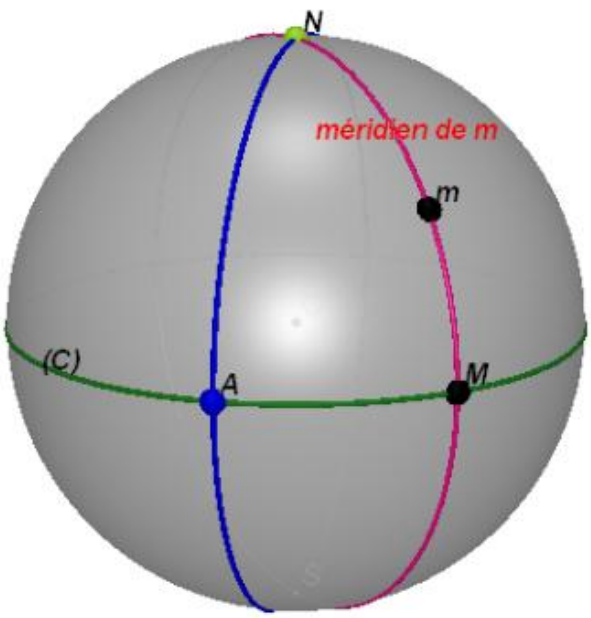


schéma 12

1) Justification angulaire

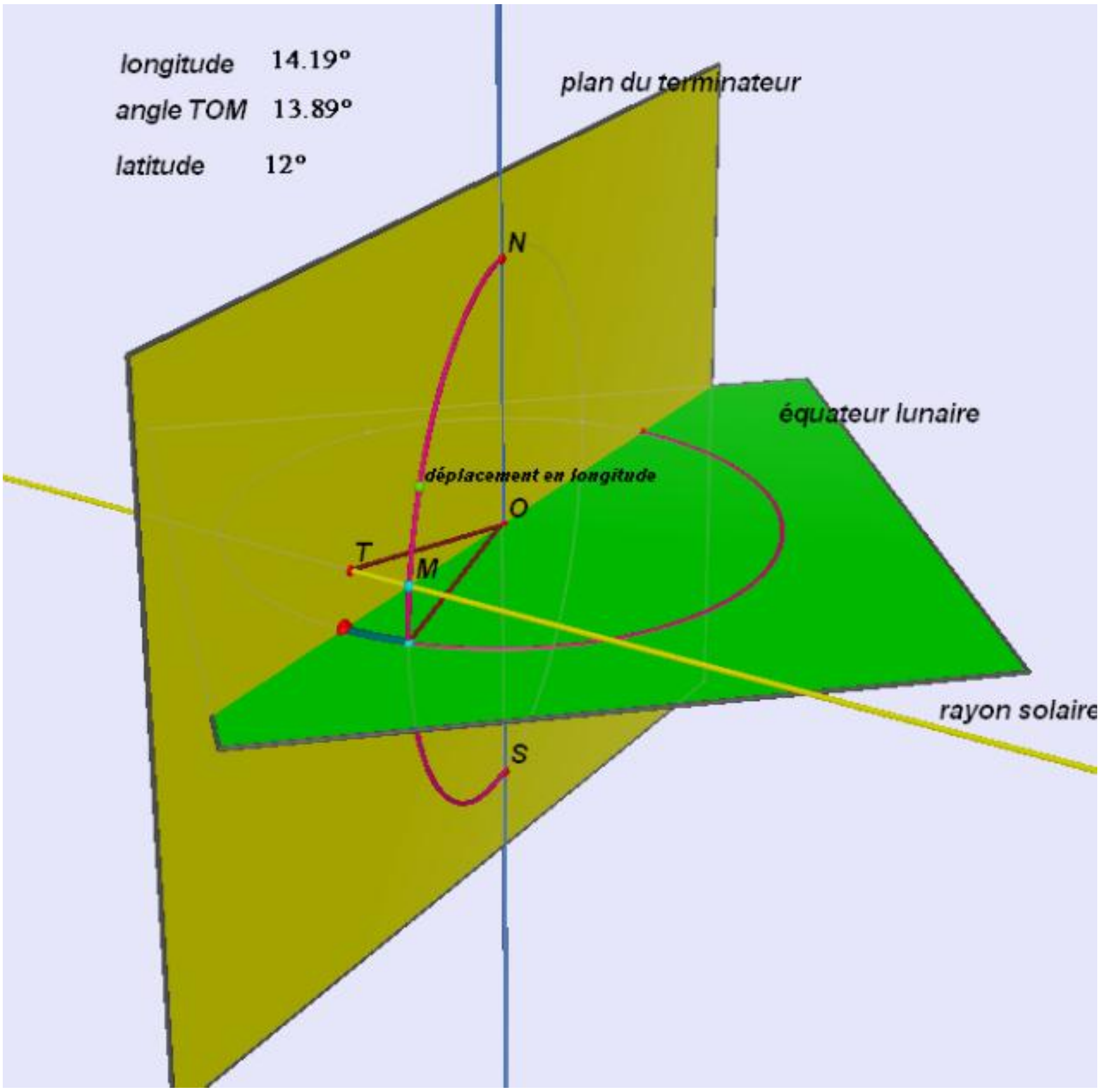


schéma 13

Ouvrir le fichier **justification angulaire**

La droite(TM) en provenance du soleil est perpendiculaire au plan du terminateur et le point T appartient au terminateur.

le méridien de M est le grand cercle passant par les pôles nord et sud de la lune et par M.

On peut faire varier M sur son méridien et aussi en longitude grâce au point vert et constater que plus M est proche de l'équateur lunaire et du plan du terminateur plus la mesure de l'angle $\widehat{TOM}$ se rapproche de l'angle que fait le terminateur avec le plan du méridien contenant M , **c'est à dire de la différence de longitude θ entre le plan du terminateur et le point M.**

Regardons ce que représente 12° de latitude sur la lune, latitude à laquelle

$\widehat{TOM} \approx \theta$

Le périmètre de la lune est : $2\pi\times1737$ km $\approx$ 10900 km

Par une règle de trois , on trouve que 12° de latitude représente environ 360 km.

Plus nous nous éloignerons de l'équateur lunaire et moins la méthode des longitudes que nous allons exposer sera fiable, méthode qui repose sur l'ombre de la montagne lunaire.

2) Projection orthogonale d'un segment.

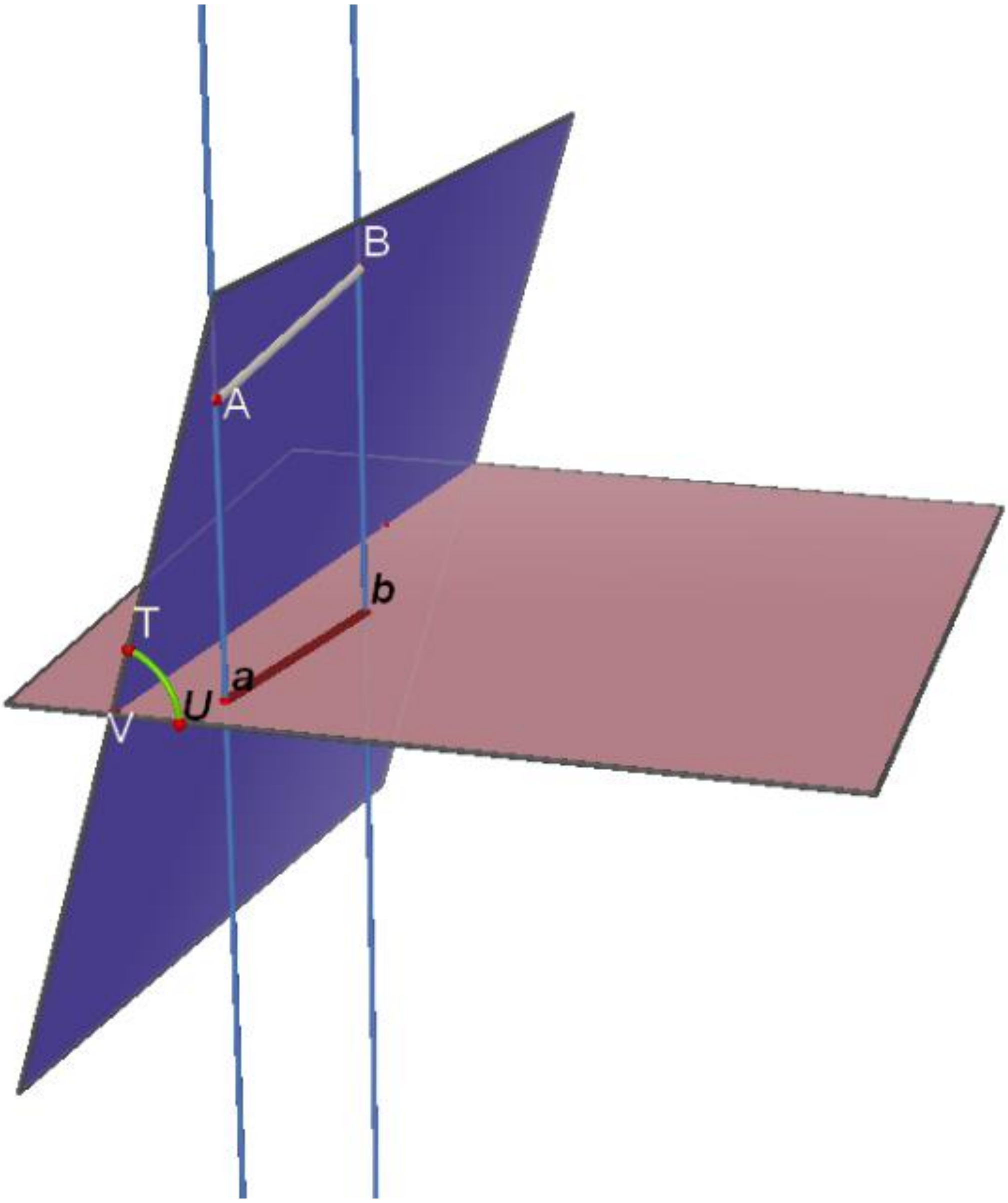


schéma 14

Posons $\widehat{TVU} = \alpha$ = angle des 2 plans

Théorème : ab = AB cos α

Ce théorème est vrai aussi si α désigne l'angle (AB) avec le plan de projection.

3) La colongitude du terminateur

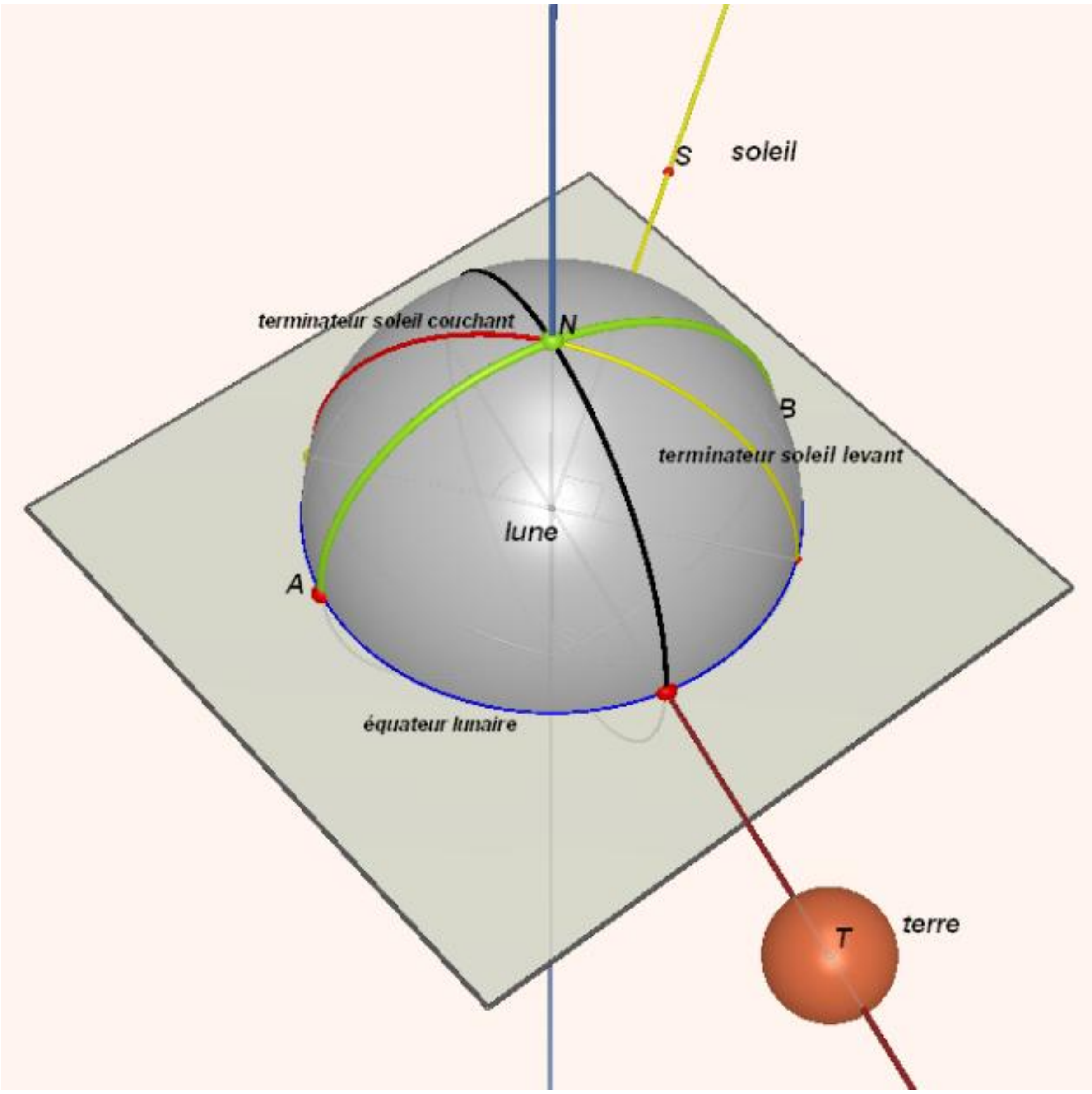


schéma 15

Le terminateur est la ligne de séparation entre la partie sombre et la partie éclairée de la lune.

En vert la limite de la face visible de la lune pour un observateur terrestre.

Le demi cercle en jaune est le **terminateur du soleil levant ou terminateur du matin**, délimitation produite **entre la nouvelle lune et la pleine lune.**

Le demi cercle en rouge est le **terminateur du soleil couchant ou terminateur du soir**, délimitation produite **entre la pleine lune et la nouvelle lune.**

<u>Définition</u> :La **colongitude** est la longitude du terminateur du matin comptée de 0°à 360° dans le sens des aiguilles d'une montre pour un observateur situé au nord et regardant l'équateur céleste.

Si la colongitude est dans l'intervalle $]90°\,;\;270°[$, on observe le terminateur du soleil couchant.

Si la colongitude est dans l'intervalle $[0°; 90°[$ ou , $]270°; 360°]$ on observe le terminateur du soleil levant.

<u>Définition</u> : La longitude du terminateur est la longitude d'un point de ce terminateur.

Le logiciel ATLAS VIRTUEL DE LA LUNE affiche à une certaine heure :

colongitude = 283,1° ce qui signifie que l'on observe le terminateur du soleil levant et que sa longitude est : 360°-283,1° = 76,9°

Le logiciel COELIX permet de connaître directement la longitude du terminateur du soleil levant et la longitude du terminateur du soleil couchant.

	Date	Heure	Terminateur	Terminateur	Long. sél.	Lat. sél.	Long. sél.	Lat. sél.	Long. sél.	Lat. sél.	Angle pos.	Angle pos.
	aaaa mm jj	hh:mm	S. levant	S. couchant	Observateur	Observateur	Terre	Terre	Soleil	Soleil	pôle nord	limbe éclairé
1	2012 06 01	04:00	47,94°	227,94°	4,43°	5,29°	4,08°	4,44°	317,94°	-0,13°	22,92°	287,84°
2	2012 06 02	04:00	60,13°	240,13°	2,86°	3,83°	2,43°	2,95°	330,13°	-0,16°	20,07°	284,02°
3	2012 06 03	04:00	72,32°	252,32°	1,09°	2,13°	0,61°	1,25°	342,32°	-0,20°	15,69°	279,06°
4	2012 06 04	04:00	84,51°	264,51°	-0,76°	0,34°	-1,26°	-0,55°	354,51°	-0,23°	10,06°	273,46°
5	2012 06 05	04:00	96,69°	276,69°	-2,56°	-1,42°	-3,05°	-2,30°	6,69°	-0,27°	3,71°	86,89°
6	2012 06 06	04:00	108,88°	288,88°	-4,18°	-3,01°	-4,63°	-3,86°	18,88°	-0,30°	357,26°	81,15°
7	2012 06 07	04:00	121,07°	301,07°	-5,50°	-4,32°	-5,89°	-5,14°	31,07°	-0,34°	351,27°	76,13°
8	2012 06 08	04:00	133,26°	313,26°	-6,45°	-5,28°	-6,76°	-6,07°	43,26°	-0,37°	346,11°	72,17°
9	2012 06 09	04:00	145,46°	325,46°	-6,97°	-5,86°	-7,19°	-6,63°	55,46°	-0,41°	341,94°	69,34°
10	2012 06 10	04:00	157,67°	337,67°	-7,07°	-6,06°	-7,19°	-6,81°	67,67°	-0,44°	338,84°	67,62°

schéma 16

4) Le logiciel Salsaj et le logiciel atlas virtuel de la lune

Utiliser le logiciel atlas virtuel de la lune https://www.ap-i.net/avl/fr/start

Le point rouge désigne le cratère TYCHO.

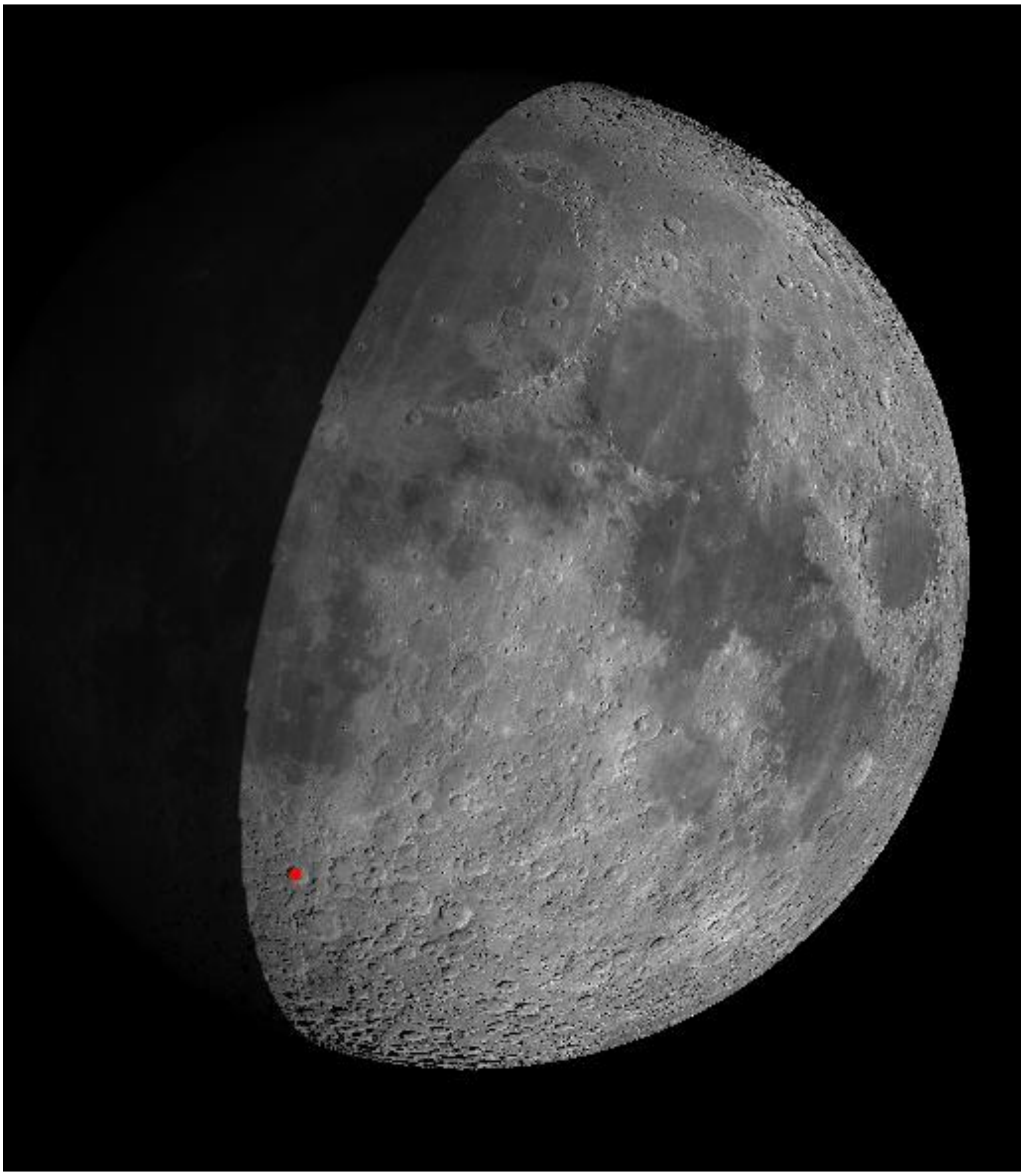


schéma 17

Données et photos extraits de :

http://www.sciencesalecole.org/documentsSAE/astro_a_lecole/bilan1314/borgnon/Profondeur%20dun%20cratre.pdf

Utiliser le **logiciel SalsaJ**, ouvrir cette image de la lune obtenue sur **l'atlas virtuel de la lune** le **10 janvier 2014 à 12 h 49 m 58 s.**

Prendre l'outil **sélection rectiligne** et tracer sur l'image un diamètre de la lune.

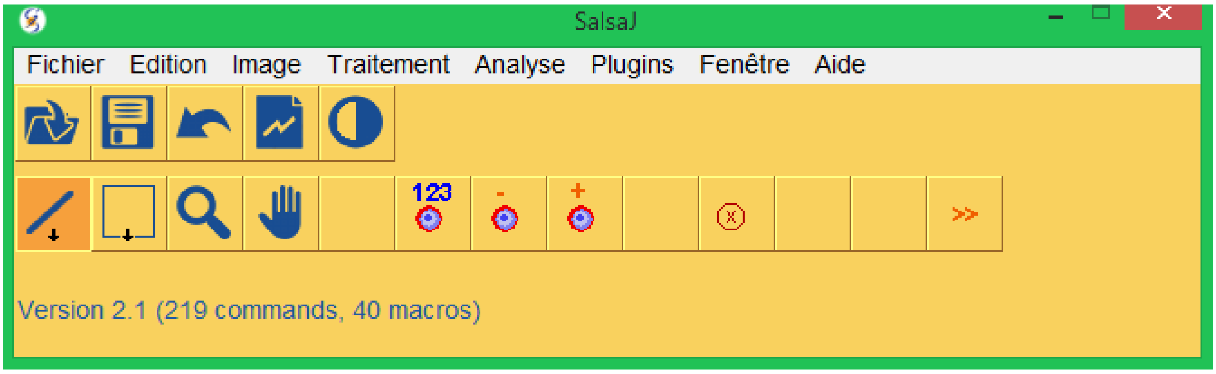


schéma 18

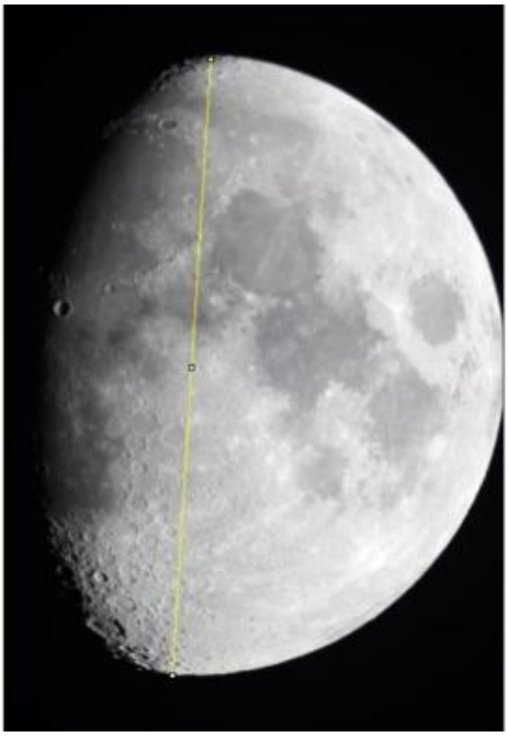


schéma 16

La ligne jaune correspond au diamètre de la lune.

Entrez dans « **Analyse** » puis « **indiquer l'échelle** ».

Dans la fenêtre qui va s'ouvrir, entrer la distance réelle de la Lune (3476 Km) et l'unité de mesure en Km et faire « Oui ». Vous pouvez désormais mesurer la longueur de l'ombre d'un cratère en Km.

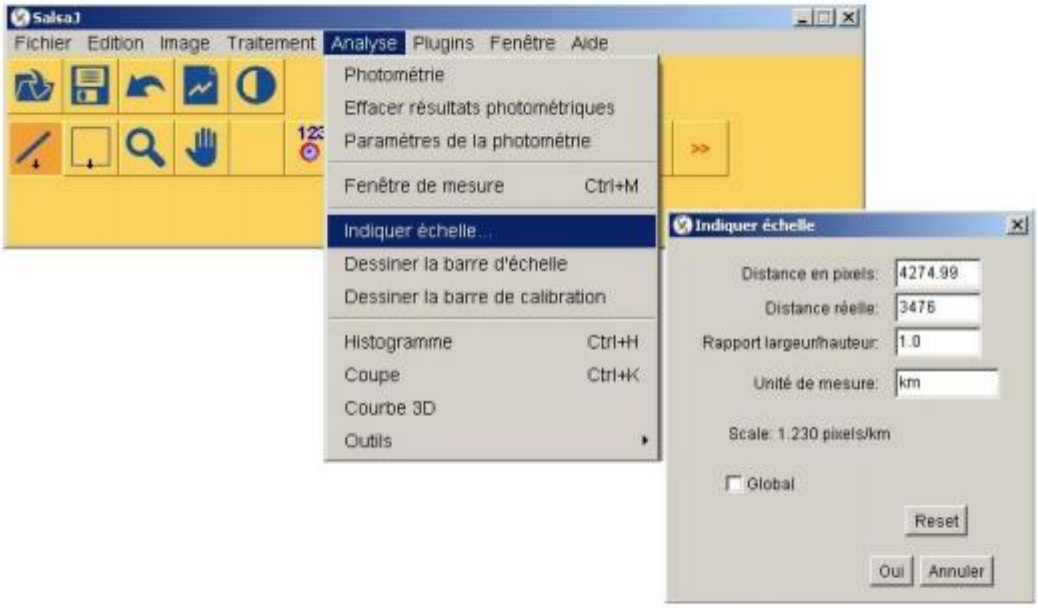


schéma 19

Après agrandissement de la zone du cratère, on trouve 25,23 km environ pour la longueur de l'ombre.

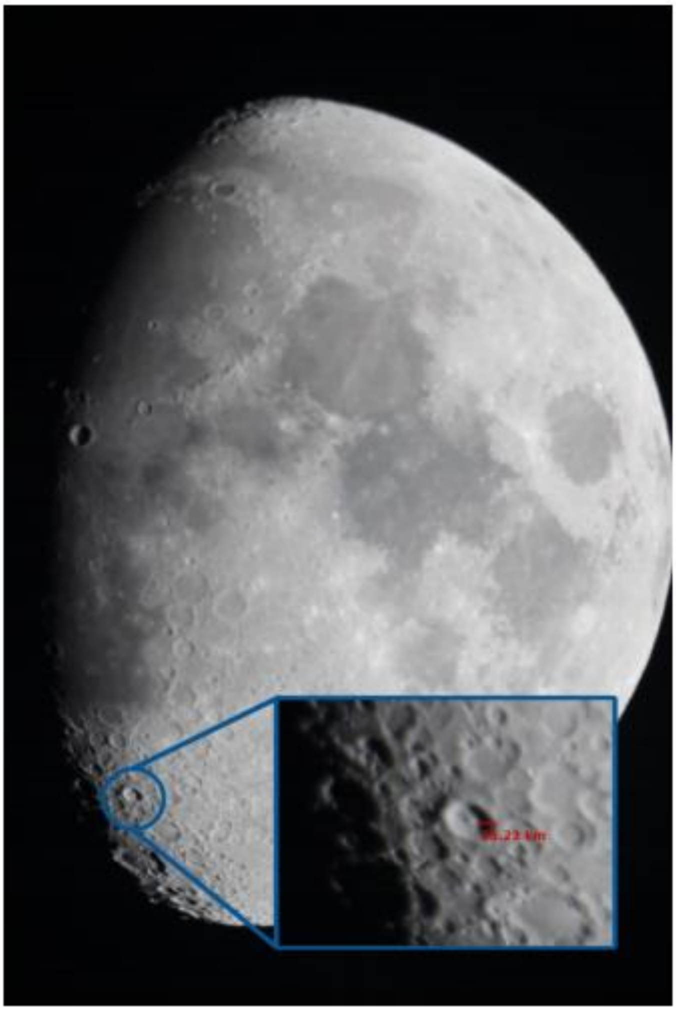


schéma 20

Avec le logiciel atlas virtuel de la lune , nous notons :

Longitude du cratère TYCHO = 11,2° Ouest

Longitude du terminateur = 21,7°

Les explications qui suivent ne font pas partie de l'article cité.

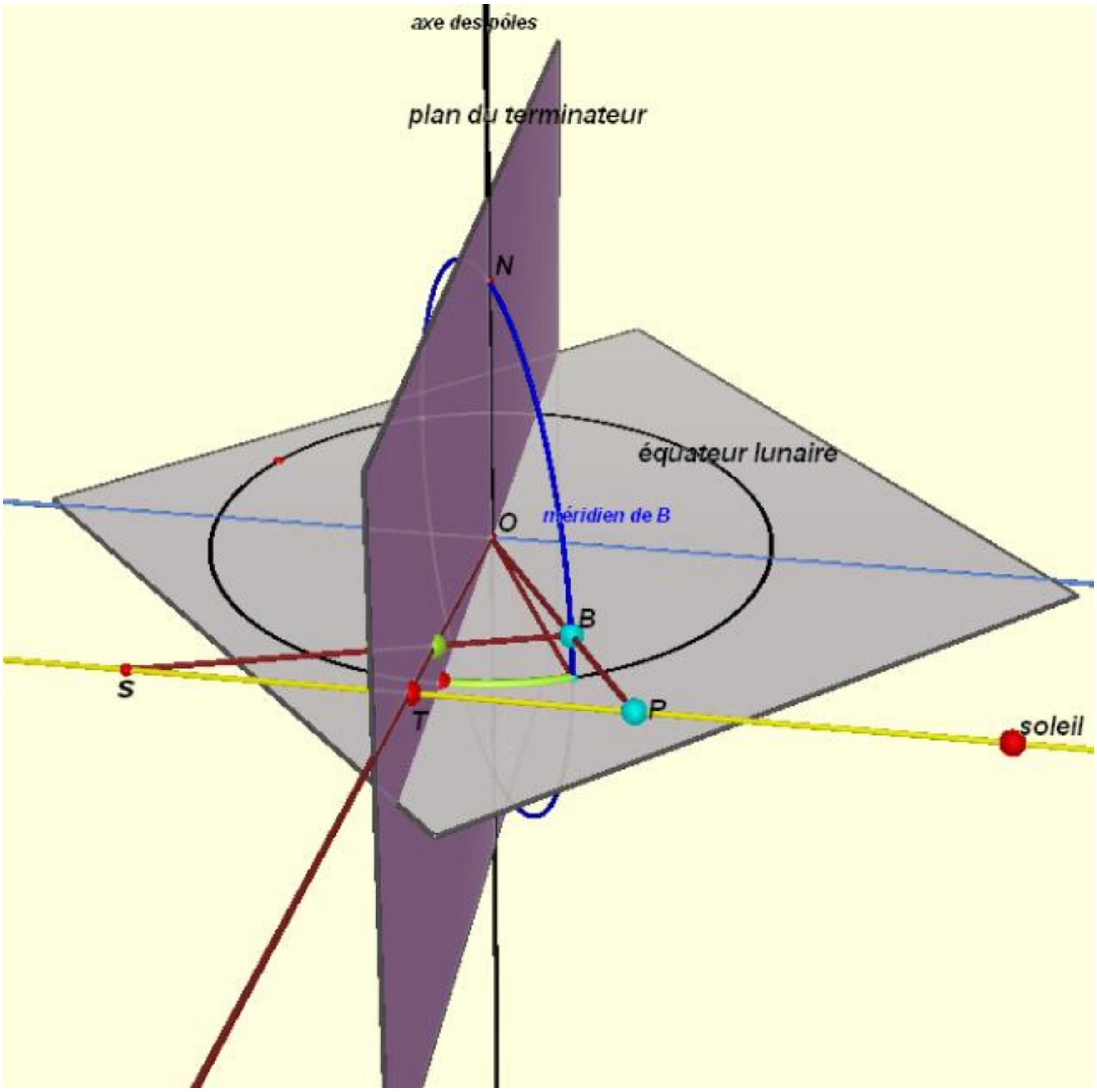


schéma 21

S est l'intersection d la ligne soleil P avec le plan horizontal de B, B étant le point de la lune que l'on étudie, ici le cratère TYCHO.

Les angles $\widehat{BSP}$ et $\widehat{BOT}$ sont des angles à côtés perpendiculaires donc égaux.

Dans le **c/1**nous avons vu que $\widehat{BOT}$ représente approximativement la différence de longitude entre le terminateur et le point étudié :

21,7°-11,2°= 10,5°

Or dans le triangle rectangle SBP, l'angle $\widehat{BSP}$ représente l'angle que fait le soleil avec l'horizon et l'on a : tan $\widehat{BSP} = \frac{BP}{PS}$

BP est la hauteur cherchée : BP = tan $\widehat{BSP} \times$ PS

PS est la longueur lue sur la photo , soit 25,3Km qui est la longueur apparente et il nous faut connaître la distance réelle.

Or l'angle que fait le plan du méridien de B avec le premier méridien de la lune , celui sur lequel se fait notre vision en perspective, est par définition la longitude de B, ici la longitude du terminateur : notre vision ne perçoit que les projections orthogonales sur ce plan et cette longitude vaut 12,6° Ouest.

Appliquons alors le résultat du paragraphe **C2** :

d apparente = d réel $\times$ cos(11,2°)

PS = d réel = $\frac{25{,}23 \text{ Km}}{\cos(11{,}2°)}$ soit environ 25,71 km

La hauteur cherchée est donc tan(10,5°) $\times$ 25,71 $\approx$ 4,76 km soit 4760 m

On peut vérifier cette valeur grâce à l'Atlas qui indique 4 800 m.

Que donne le logiciel MOON ?

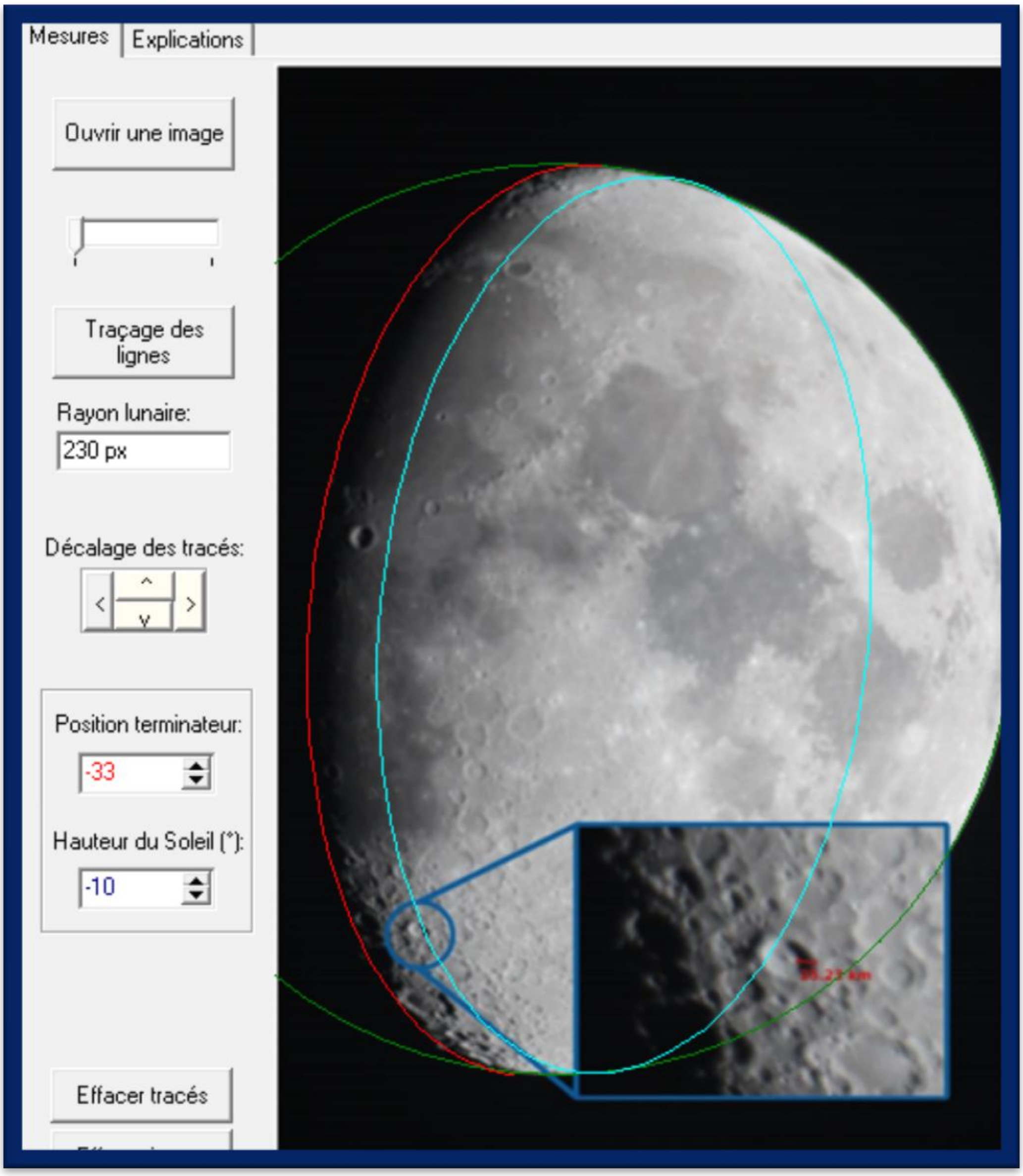


schéma 22

$\tan(10°) \times 25{,}71 \approx 4{,}53$ km soit 4530 m

La différence avec le résultat exact vient de ce que l'on essaye **de positionner au mieux** le terminateur.

Cependant cette méthode avec le logiciel MOON donne un résultat satisfaisant.

Ne pas tenir compte du signe - pour les hauteurs et **partir du terminateur** avec **l'arc bleu** pour rejoindre le cratère. (Le logiciel présente quelques bugs non rédhibitoires).

Attention : la méthode des différences de longitude peut donner des résultats aberrants si l'on est trop loin de l'équateur lunaire.

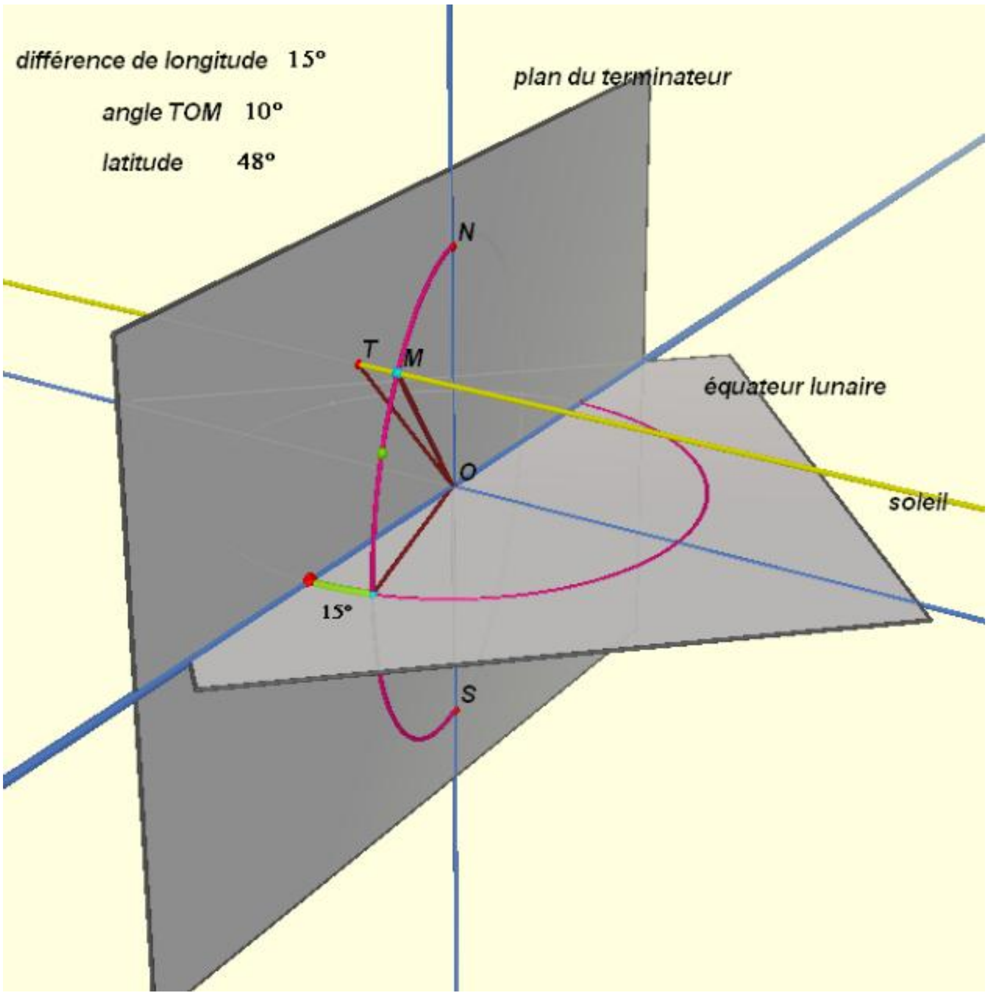


schéma 23

Nous somme à une latitude de 48° et la mesure de l'angle $\widehat{TOM}$ s'écarte de 5° de la différence de longitude.

On pourra observer que si l'on déplace le petit point vert vers la droite ou la gauche (on fait ainsi varier la longitude du point M), le fait d'être proche de l'équateur lunaire n'introduit pas d'erreur notable.

D) Méthode de Galilée

schéma 24

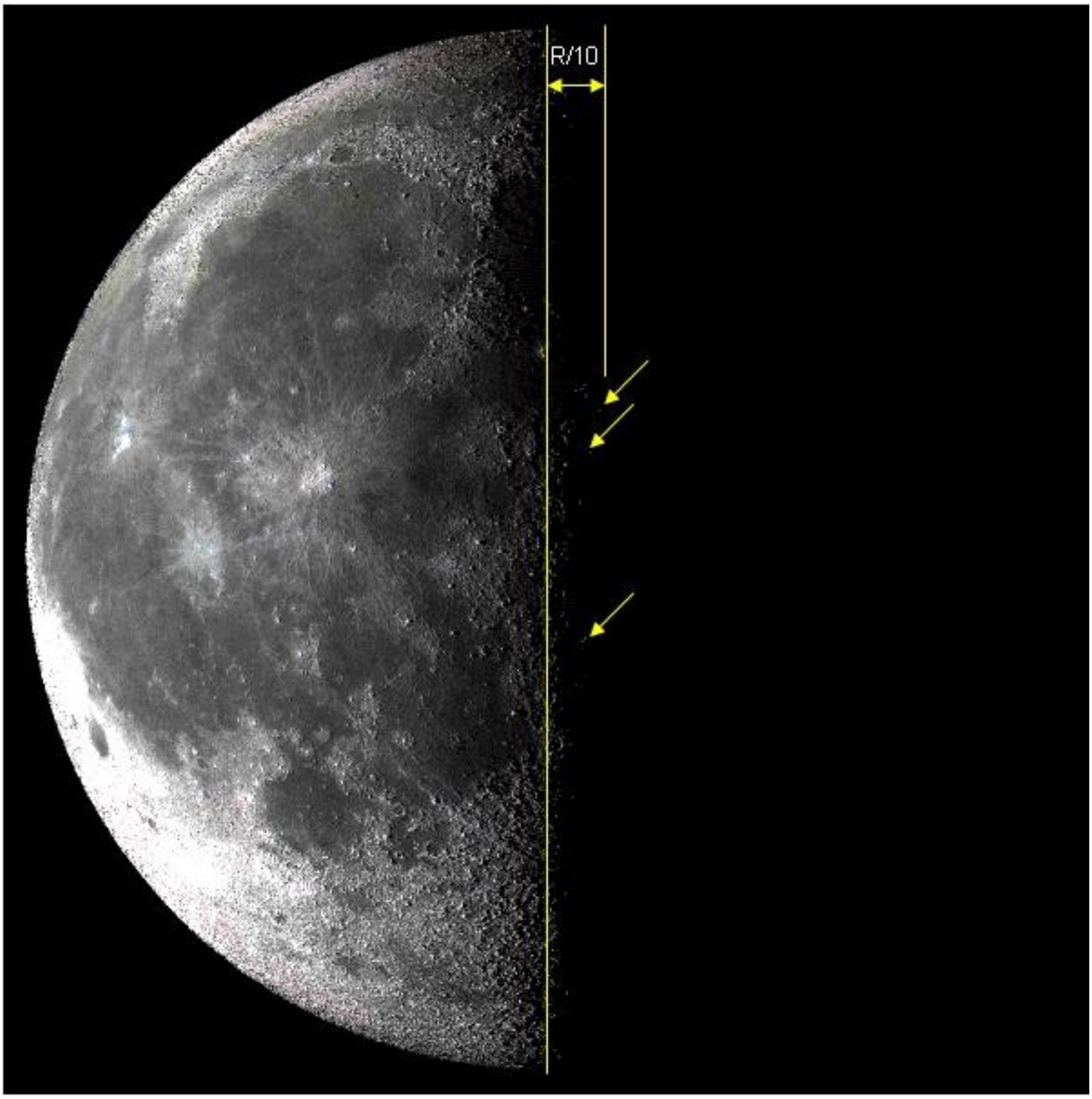


schéma 25

source : http://images.math.cnrs.fr/Il-y-a-quatre-cents-ans-Sidereus.html

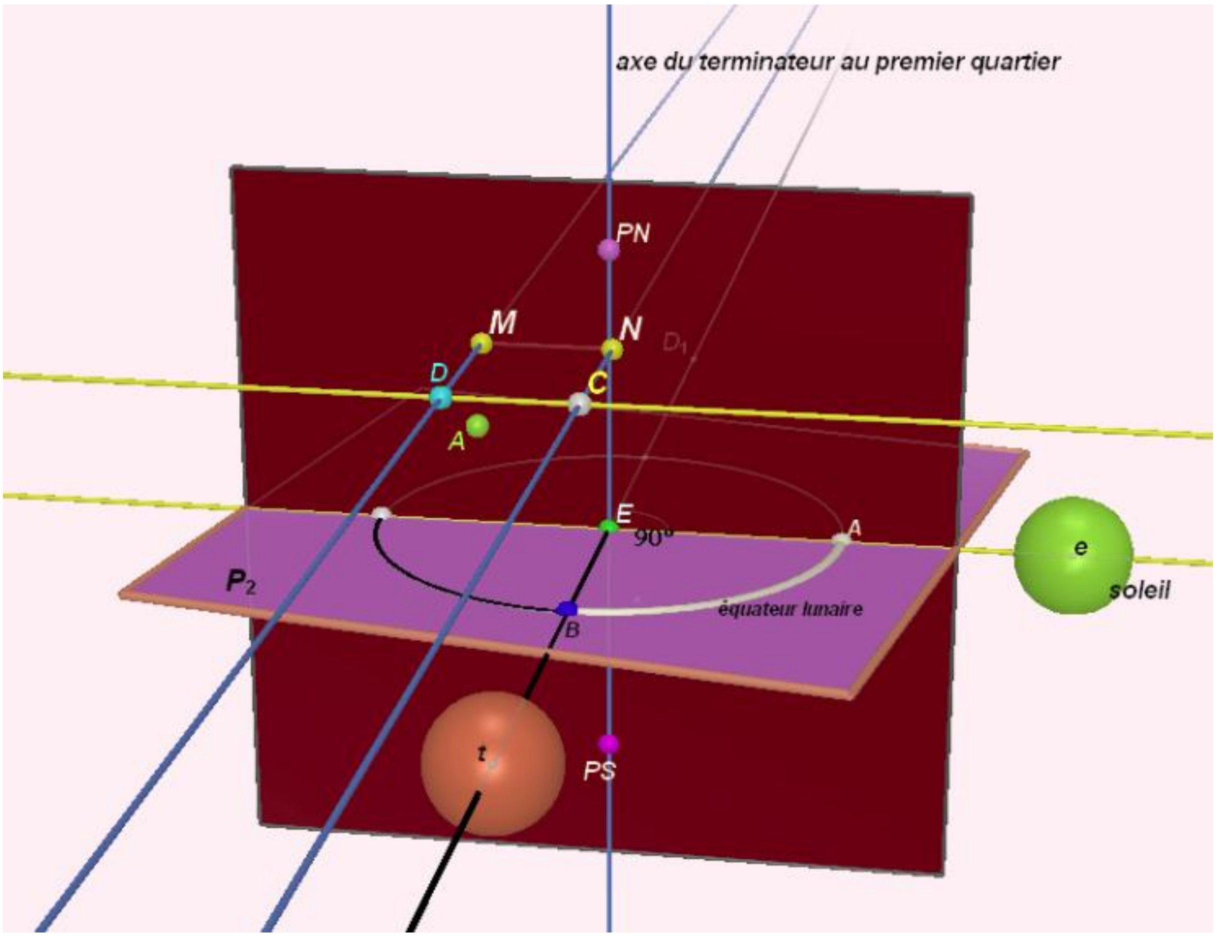


schéma 26

E centre de la lune, A , la base de la montagne , D le sommet de la montagne

C le point de rencontre du terminateur avec le rayon lumineux éclairant le point D. Les points E, A , D sont donc alignés.

N, la projection de C sur le terminateur qui est porté ici par l'axe nord sud de la lune puisque nous sommes à **l'un des deux quartiers de la lune.** L'angle $t\widehat{E}a$ vaut 90°.

M et N les projetés orthogonaux de D et C sur le plan marron qui est le plan perpendiculaire à la droite terre lune passant par E.

Avec les notations du schéma précédent :

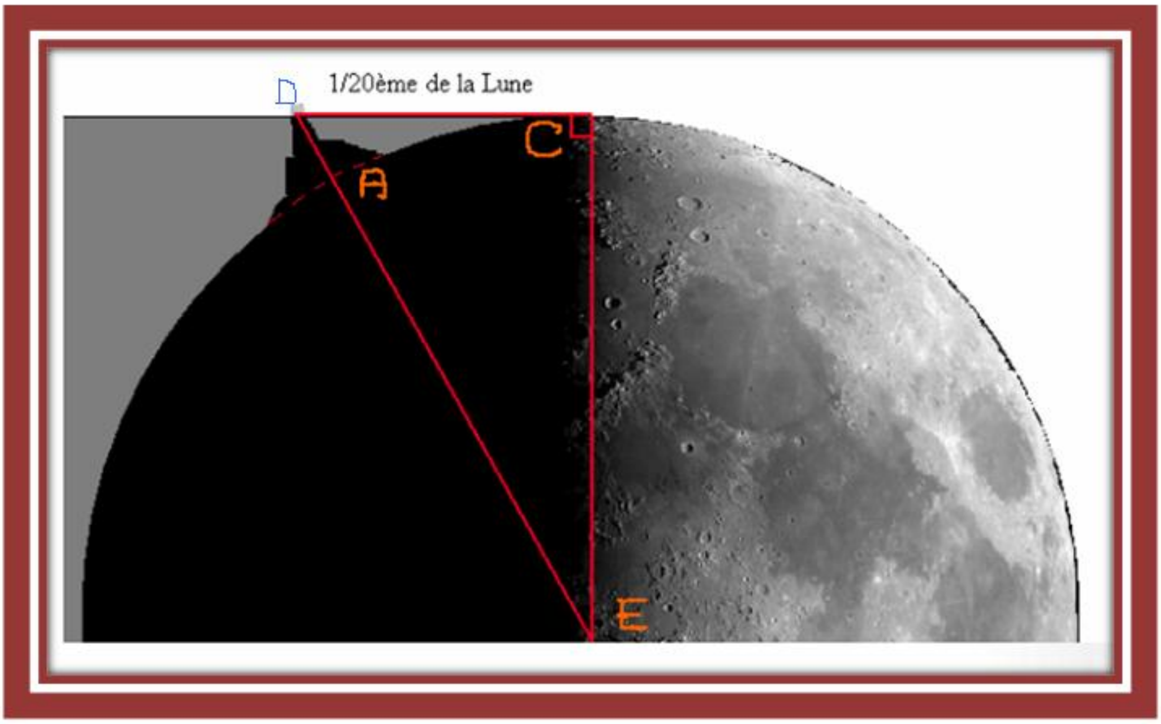


schéma 27

Au premier quartier, le terminateur en projection orthogonale est un segment de droite perpendiculaire à l'équateur lunaire.

Par conséquent MN mesuré sur une photo et en tenant compte de l'échelle sera égale à CD, N étant la projection orthogonale sur le terminateur qui ici est une droite.

Sur la photo, les points A et D seront confondus et nous mesurerons en réalité la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AC}$. Or plus on s'éloigne du terminateur et moins la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AC}$ est proche de la longueur DC. Cette méthode est approximative mais néanmoins donne une idée d la hauteur de certaines montagnes lunaires.

on a : $(R+AD)^2 = DC^2 + R^2$

R le rayon de la lune $\approx$ 1734Km

Galilée observe des montagnes telles que MN = 1/10 rayon lunaire =173,4 km
Par exemple la montagne correspondant à la première flèche à partir du haut.

Or MN = DC donc AD = hauteur $\approx$ 8,6 Km.

E) Méthode de l'angle de phase qui ne tient pas compte de la sphéricité du sol lunaire.

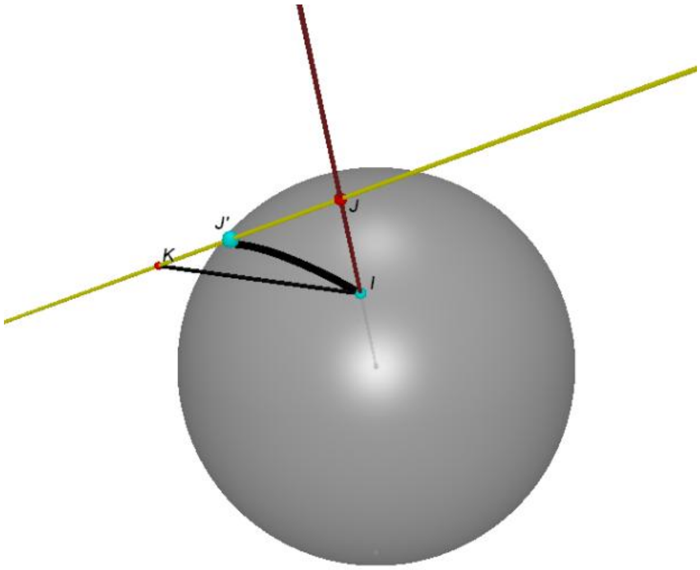


schéma 28

En jaune le rayon solaire.

Soit I la base de la montagne, J le sommet de la montagne : deux options vont se présenter selon que les calculs tiendront ou non compte de la sphéricité de la lune.

- On se sert du point K intersection du rayon solaire avec le plan horizontal en I

- ou bien l'on se sert du point J' intersection du rayon solaire avec la surface de la lune.

Dans tous les cas, la longueur de l'ombre mesurée sur une photo de la montagne sera la longueur d de l'arc $\overset{\frown}{IJ'}$ mais le calcul de la hauteur de la montagne sera fonction de ce que l'on considère que d provient du point J'ou du point K.

Si c'est du point K, le calcul sera plus simple mais moins précis comme nous allons le voir.

Nous allons établir que si d désigne la longueur de **l'ombre apparente** (du sommet de la montagne à l'extrémité de l'ombre) alors la hauteur de la montagne est si $\mathbf{L_S}$ **et** $\mathbf{L_I}$ **de même signe** :

$$\boxed{H= \frac{d\cos\varphi \cos(\theta-\delta)}{\sin\vartheta}}$$

ϑ angle de phase et δ **longitude arithmétique** du lieu I et φ latitude du lieu I.

Si $\mathbf{L_S}$ **et** $\mathbf{L_I}$ **de signe contraire**

$$\boxed{H= \frac{d\cos\varphi \cos(\theta+\delta)}{\sin\vartheta}}$$

L_S et L_I désignant les longitudes sélénographiques du lieu I et du soleil S.

Selon la convention adoptée par l'UAI, les longitudes Est sont positives, les Ouest sont négatives.

Considérons le schéma 28 suivant et les notations qui s'y rapportent :

I base de la montagne lunaire

J sommet de la montagne

K intersection du rayon lumineux passant par le sommet J avec le plan horizontal du lieu I

(P) le plan perpendiculaire en O à la droite (centre terre centre lune).

(Q) le plan de l'écliptique confondu avec le plan de l'équateur lunaire par souci de simplification

L'œil ne perçoit pas JK mais AB, A étant la projection orthogonale de K sur (P) et B étant la projection orthogonale de J sur (P).

L'angle $\widehat{JKI}$ est l'angle que fait le rayon solaire avec le plan horizontal.

Appelons cet angle α.

Posons θ = angle de phase = angle terre soleil vu du centre de la lune

$= \widehat{WOE}$

Le repère (OX, Oy,OZ) est orthonormé.

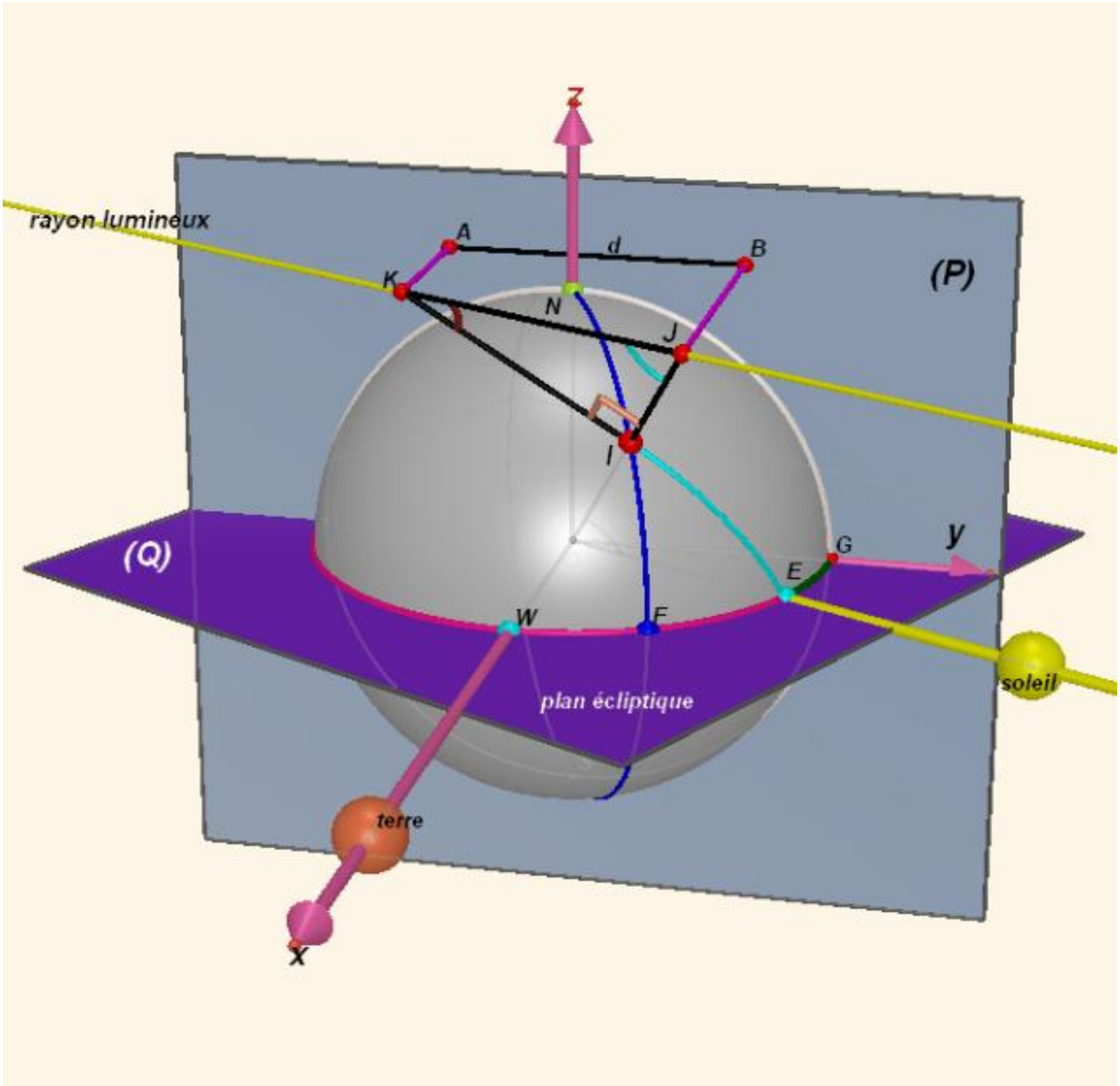


schéma 29

Le même schéma sans la lune

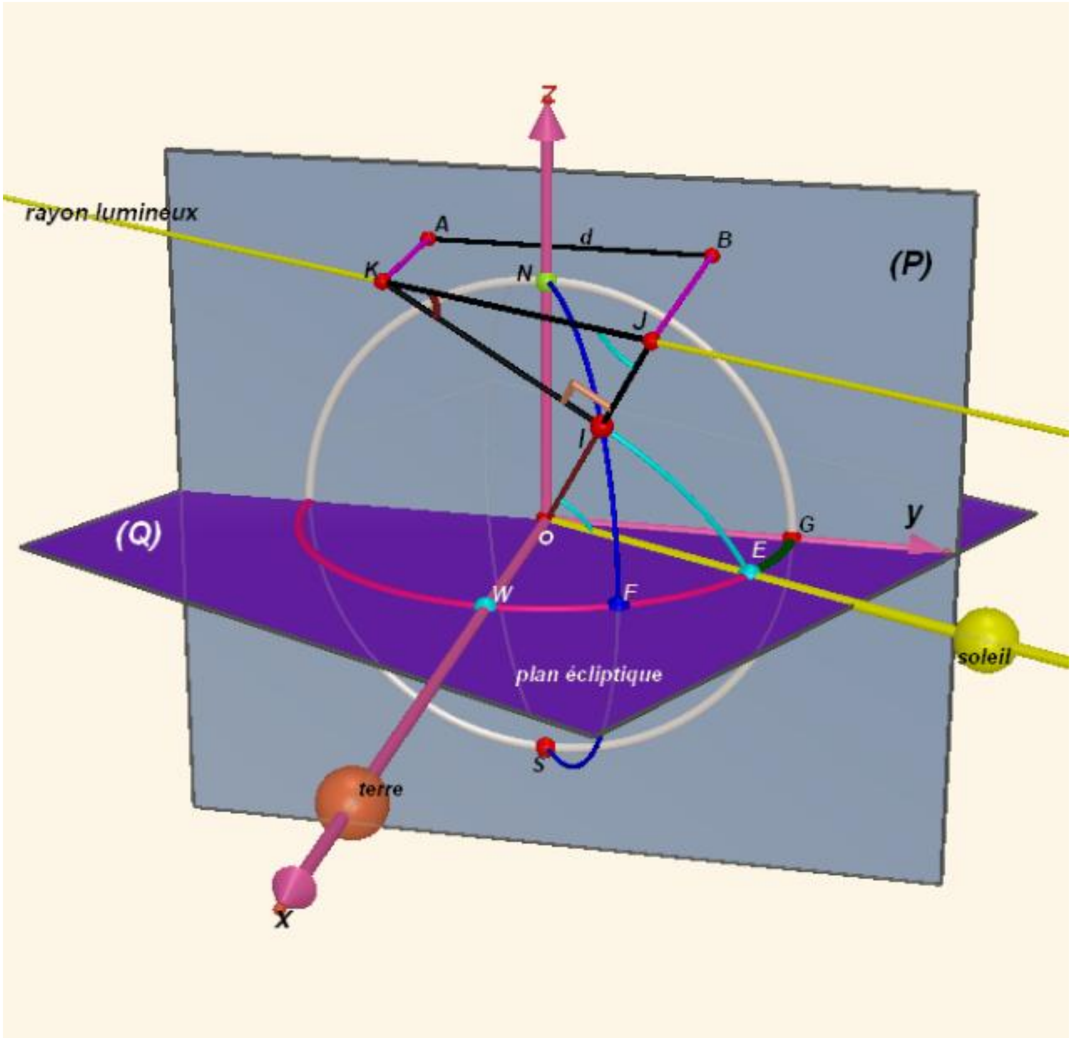


schéma 30

Les rayons solaires sont paralléles.

Le triangle JKI est rectangle en I

On a $\widehat{KJI} = \widehat{JOE}$ angles alternes -internes

On a $\widehat{KJI} = \frac{\pi}{2} - \alpha$

Considérons le grand cercle de la lune supposée sphérique et pasant par I et E.

On a $\overset{\frown}{IE} = \frac{\pi}{2} - \alpha$

Dans un triangle ABC sphérique rectangle en C on a :

$\cos c = \cos b \cos a.$ (1)

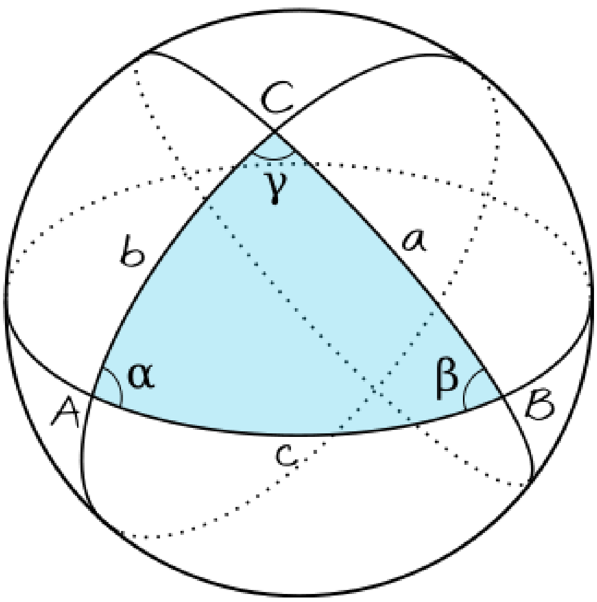


schéma 31

Considérons alors le triangle **sphérique** IFE rectangle en F :

On a : $\overset{\frown}{FE} = \vartheta - \delta$ δ **longitude du lieu qui peut être positive ou négative**

$\overset{\frown}{IF} = \varphi$ φ **latitude du lieu**

$\overset{\frown}{IE} = \frac{\pi}{2} - \alpha$ α **angle que fait le rayon solaire avec le plan horizontal**

On alors : $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\varphi \cos(\vartheta - \delta)$ d'après (1)

D'où **$\sin\alpha = \cos\varphi \cos(\vartheta - \delta)$** (2)

Par ailleurs l'angle que fait la droite (J'J) avec le plan (P) vaut :

$\pi/2 - \vartheta$. Appliquons la propriété C2 sur la projection orthogonale d'un segment :

$d = AB = KJ \cos(\pi/2 - \vartheta) = KJ \sin\vartheta$ (3)

Dans le triangle **plan** KJ I rectangle en I on a :

$\cos(\pi/2 - \alpha) = \frac{IJ}{KJ} = \frac{H}{KJ}$ avec H hauteur de la montagne

$\sin\alpha = \frac{H}{KJ}$

Si bien que : $H = d\,\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}$ (4) $H = \rho \sin\alpha$ (5)

$$H = \frac{d \cos\varphi \cos(\vartheta - \delta)}{\sin\theta} \quad (6)$$

Examinons le cas particulier ou l'on est sur l'équateur lunaire.

Dans ce cas $\varphi = 0$

La relation (2) $\sin\alpha = \cos\varphi \cos(\vartheta - \delta)$ devient :

$\sin\alpha = \cos(\vartheta - \delta)$ soit $\cos(\pi/2 - \alpha) = \cos(\vartheta - \delta)$

$\pi/2 - \alpha = \vartheta - \delta$

D'où $\boxed{\alpha = \pi/2 - (\vartheta - \delta)}$ (6)

Selon la convention adoptée par l'UAI, les longitudes Est sont positives, les Ouest sont négatives.

Résumé :

Si l'on ne tient pas compte de la sphéricité du sol lunaire alors :

$$H = d\,\frac{\sin\alpha}{\sin\theta} \quad (4) \qquad H = \rho \sin\alpha \quad (5) \qquad H = \frac{d \cos\varphi \cos(\vartheta - \delta)}{\sin\theta} \quad (6)$$

F) Influence de la sphéricité du sol lunaire

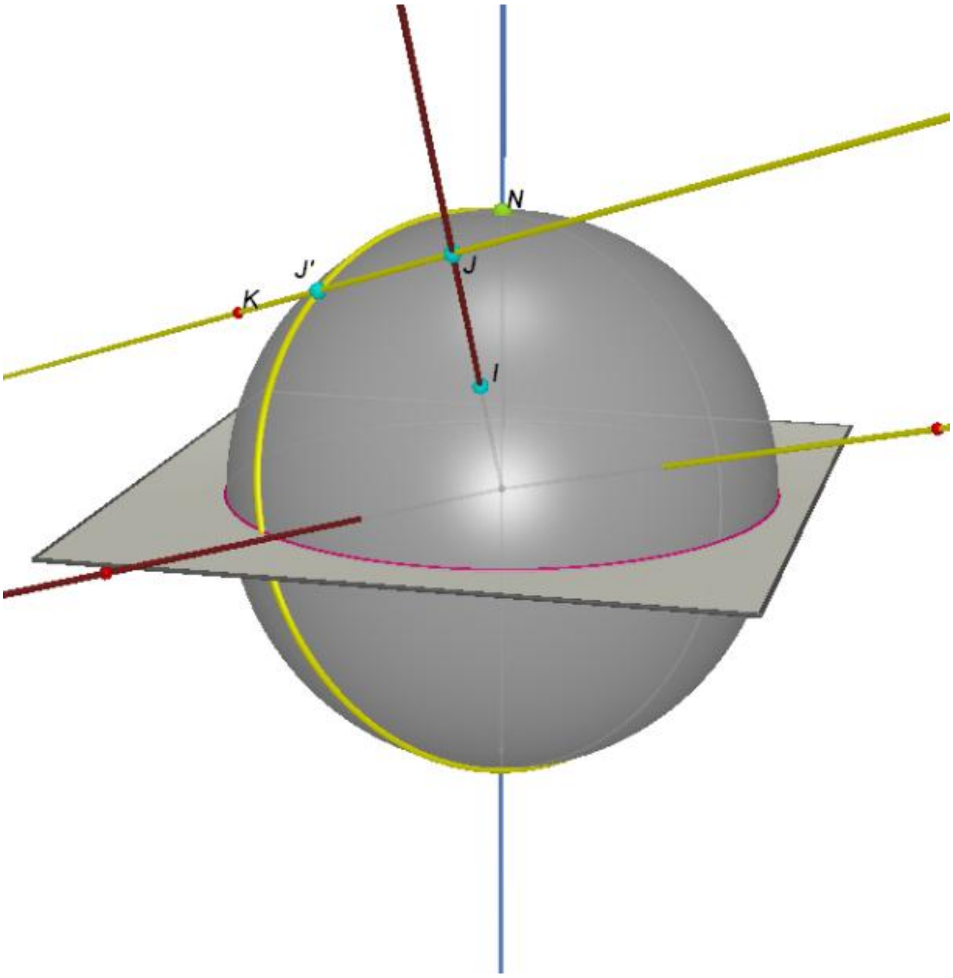


schéma 32

Supposons que J soit le **sommet le plus haut de la lune** (10Km) et que le rayon passant par le sommet J de la montagne **coupe le terminateur en J'**(cercle en jaune) et le plan horizontal de I en K . L'angle $\widehat{JKI}$ est l'angle que fait le rayon solaire avec le plan horizontal. Appelons cet angle α.

Les angles $\widehat{JKI}$ et $\widehat{J'OJ}$ sont des angles à côtés perpendiculaires et donc $\widehat{JKI} = \widehat{J'OJ}$

On a alors : cos α =R /(R+H) R rayon de la lune et H auteur de la montagne.

Comme R = 1738 Km on en déduit α ≈ 6°

Calculons JJ' : $JJ'^2 = OJ^2 - OJ'^2$ d'après le théorème de Pythagore.

D’où **JJ’ ≈ 187 Km**

Si l’on ne tient pas compte de la sphéricité du sol lunaire alors d’après la formule **(5)** du résumé précédent du **paragraphe E** :

$H=\rho \sin\alpha \approx 187 \sin(6°) \approx 19{,}5$ donc $H \approx 19{,}5$ km

La non prise en compte de la sphéricité lunaire peut donc entraîner une erreur considérable !

Fort de cet exemple, donnons la formule qui permet de connaître de manière précise la hauteur d’un montagne lunaire en tenant compte de la sphéricité de la lune.

Méthode tenant compte de la sphéricité de la lune

Rappel

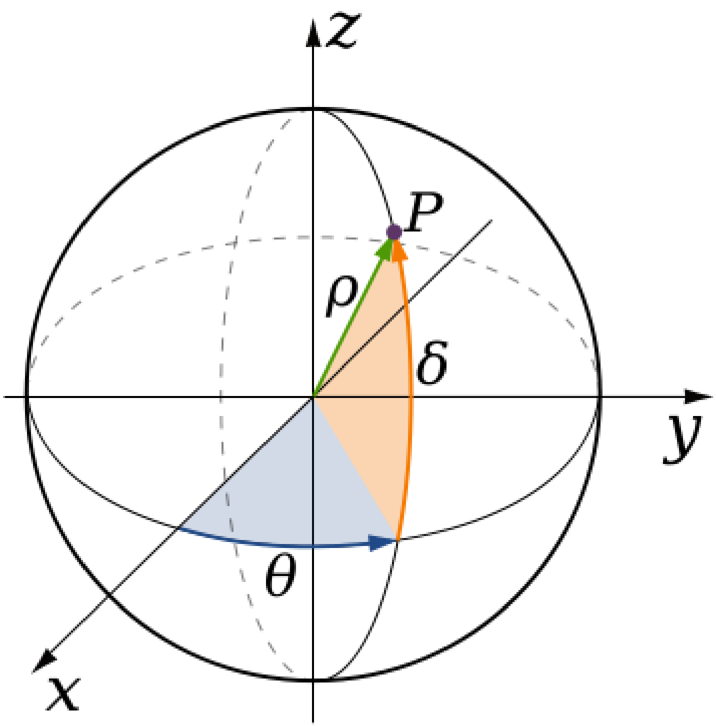


schéma 33

ρ désigne la distance du point au centre du repère (centre de la Terre) ;

θ désigne la longitude, mesurée depuis l'axe des *x* généralement entre

–180° et 180° ($-\pi \leq \theta \leq \pi$) ;

δ désigne la latitude, l'angle depuis le plan équatorial, entre

–90° et 90° ($-\pi/2 \leq \delta \leq \pi/2$).

Nous admettrons que :

$x = \rho \cos\delta \cos\vartheta$

$y = \rho \cos\delta \sin\vartheta$

$z = \rho \sin\delta$

Nous allons à présent évaluer la hauteur de la montagne en tenant compte de la courbure de la lune.

Le rayon provenant du soleil sera cette fois -ci supposé couper en un point J' la lune considérée comme sphérique.

Nous ferons l'hypothèse que le plan de l'écliptique est confondu avec le plan de l'équateur lunaire et que l'origine des longitudes est le point A du schéma 31.

https://fr.wikipedia.org/wiki/Libration_lunaire#/media/File:Lunar_libration_with_phase2.gif

En effet, l'inclinaison de l'équateur lunaire avec l'écliptique est de **1,534°** .

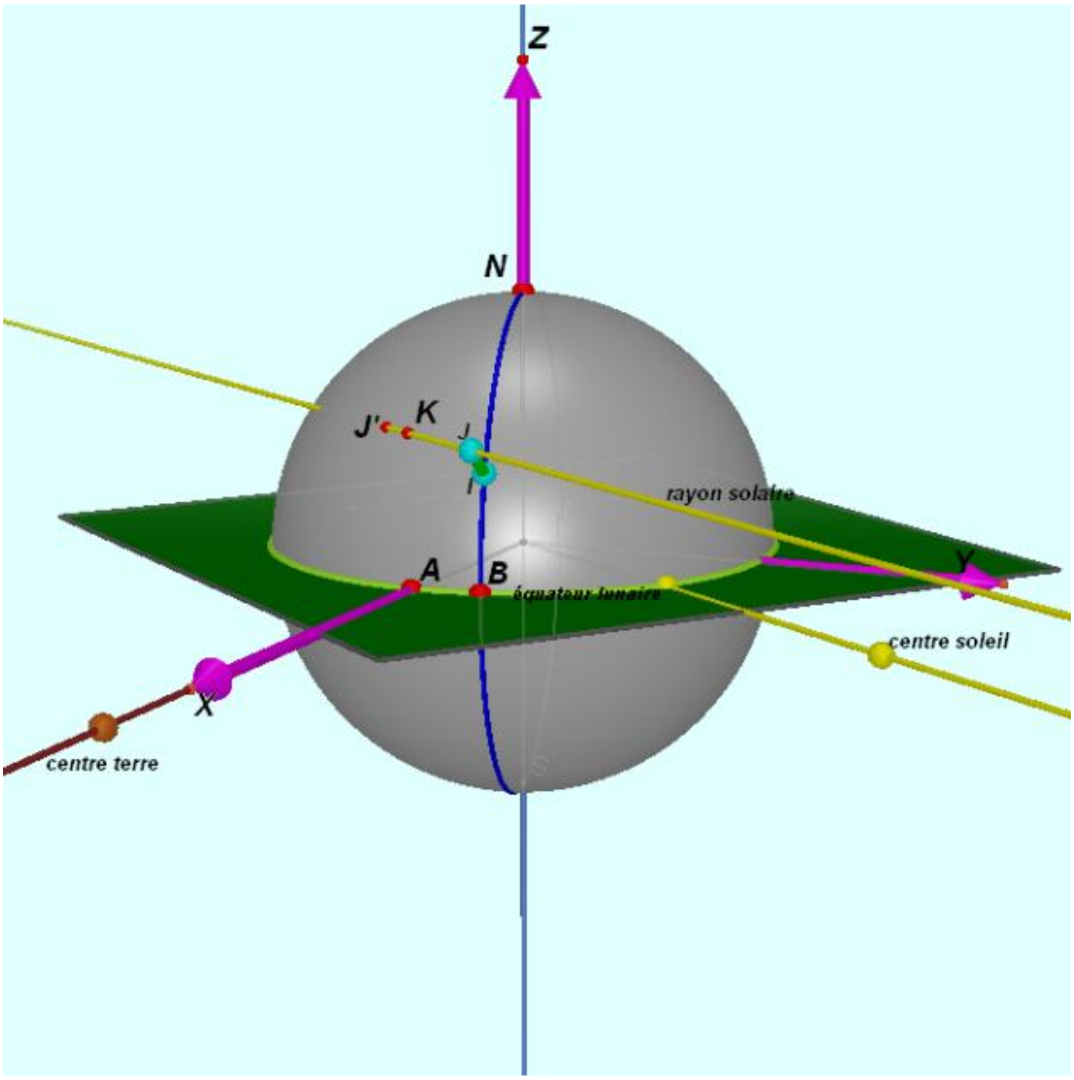


schéma 34

Notations

Attention au changement de notation en ce qui concerne la latitude et la longitude.

A partir de maintenant :

δ désigne la longitude sélénographique

φ désigne la latitude sélénographique

Les longitudes et latitude sélénographiques sont pour la lune ce que représentent les cordonnées géographiques pour la terre.

Posons par ailleurs :

A point origine des longitudes

O centre de la lune

I base de la montagne

J sommet de la montagne

K point ou le rayon solaire coupe le plan horizontal

J' point ou le rayon solaire coupe la lune

θ désigne l'angle de phase = angle terre lune soleil

α désigne l'angle que font les rayons solaires avec le plan horizontal = $\widehat{JKI}$

Début du calcul de *Bruno Morando* (1931-1995).

Les cosinus directeurs du vecteur $\overrightarrow{J'J}$ permettent d'écrire avec J (x, y, z)

et J' $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ ρ étant le module du vecteur $\overrightarrow{J'J}$.

$X = x - \rho \cos\theta$ $\quad$ $Y = y - \rho \sin\theta$ $\quad$ $Z = z$

Exprimons que le point J' est sur la lune :

$X^2+Y^2+Z^2= R^2$

Ce qui donne :

$\rho^2 - 2\rho (H+R) \cos\varphi \cos(\theta - \delta) + (H+R)^2 - R^2 = 0$

En effet, si on utilise le passage des cordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes on a :

$x = (H+R) \cos\varphi \cos\delta$ $\quad$ $y = (H+R) \cos\varphi \sin\delta$ $\quad$ $z = (H+R) \sin\varphi$

D'après la relation (2) du paragraphe E : $\boldsymbol{\cos\varphi \cos(\theta - \delta) = \sin\alpha}$

Or ce que nous observons n'est pas la distance J'J mais la projection de cette distance sur le **plan perpendiculaire à la ligne de visée**.

Cette projection vaut $\boldsymbol{d = \rho \sin\theta}$.

On a donc l'équation :

$(H+R)^2 \sin^2\theta - 2d (H+R) \sin\theta \sin\alpha + d^2 - R^2 \sin^2\theta = 0$

C'est une équation du second degré en H+R dont le discriminant est :

$\Delta = \sin^2\theta (R^2 \sin^2\theta - d^2 \cos^2\alpha)$ qui est positif si $\boldsymbol{R^2 \sin^2\theta - d^2 \cos^2\alpha \geq 0}$

Nous ne devons retenir que la racine ci-dessous :

$$\boxed{\mathbf{H = \frac{d \sin\alpha}{\sin\vartheta} + \frac{1}{\sin\vartheta}\sqrt{R^2 \sin^2\vartheta - d^2\cos^2\alpha} - R}} \qquad (1)$$

car si H=0, d doit être égal à 0.

Fin du calcul de Bruno. Morando.

Si **ρ** désigne la distance réelle du sommet de la montagne à l'extrémité de l'ombre et d la distance apparente on a :

d = ρ sinθ

Dans ce cas la hauteur de la montagne H s'exprime en fonction de la distance réelle ρ par :

$$\boxed{H = \sqrt{R^2 - \rho^2 \cos^2(\alpha)} + \rho \sin\alpha - R}$$

Exemple

Au moment du premier quartier ($\theta = 90°$) ,on trouve que la longueur **apparente** de l'ombre est 64,22 Km et que l'angle $\alpha = 10°$

La formule (1) donne H= 10 Km

La formule (4) du paragraphe E : $d = H \frac{\sin\theta}{\sin\alpha}$ donne H=11,5Km

Résumé :

Avec la courbure :

$$H = \frac{d \sin\alpha}{\sin\vartheta} + \frac{1}{\sin\vartheta}\sqrt{R^2 \sin^2\vartheta - d^2\cos^2\alpha} - R$$

$$H = \sqrt{R^2 - \rho^2 \cos^2(\alpha)} + \rho \sin\alpha - R$$

Sans la courbure :

$$H = d \frac{\sin\alpha}{\sin\theta}$$

$$H = \rho \sin\alpha$$

Montrons comment on peut obtenir ϑ et α.

Les coordonnées écliptiques

Ce système sera utilisé dans le paragraphe g.

Les éléments de référence sont :

le plan de l'écliptique et le point vernal γ

Dans ce système la direction d'un astre est définie par :

Sa longitude écliptique l

Sa latitude écliptique b

Ces deux coordonnées sont en degrés.

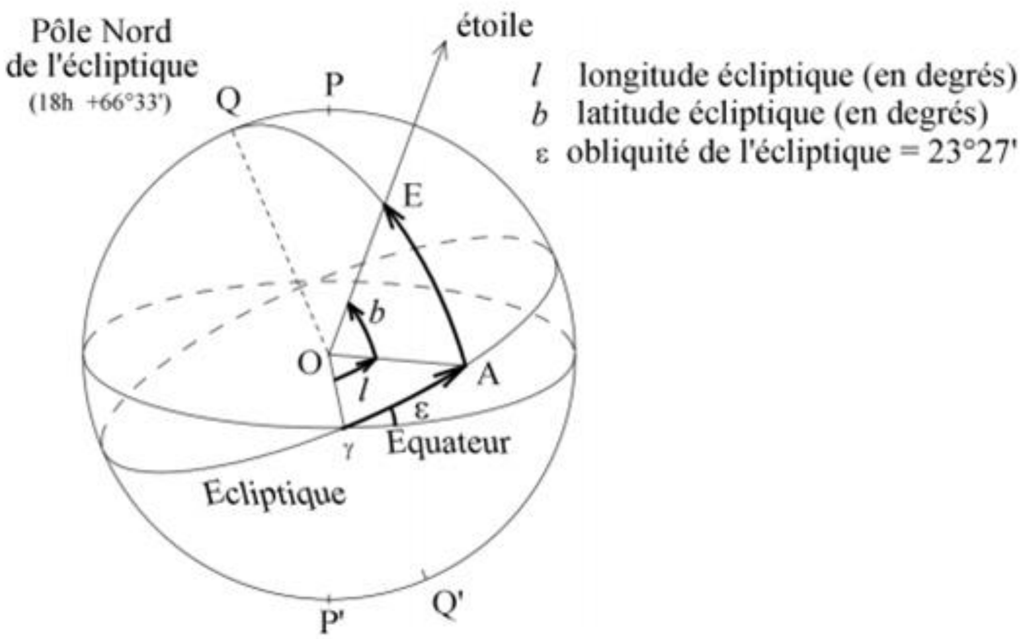


schéma 35

Appelons $\mathbf{L_S}$ **et** $\mathbf{l_S}$ la longitude et la latitude sélénographique du soleil.

$\mathbf{L_T}$ **et** $\mathbf{l_T}$ la longitude et la latitude sélénographique de la terre.

$\mathbf{L_I}$ **et** $\mathbf{l_I}$ la longitude et la latitude sélénographique du lieu étudié.

On trouve par exemple ces données dans la tables des **éphémérides physiques de la lune** du **logiciel COELIX** pour ce qui concerne le soleil et la terre et les coordonnées sélénographiques du lieu dans le **logiciel atlas virtuel de la lune.**

a) Montrons que $\mathbf{\cos\theta = \sin(l_T)\sin(l_S) + \cos(l_T)\cos(l_S)\cos(L_T - L_S)}$

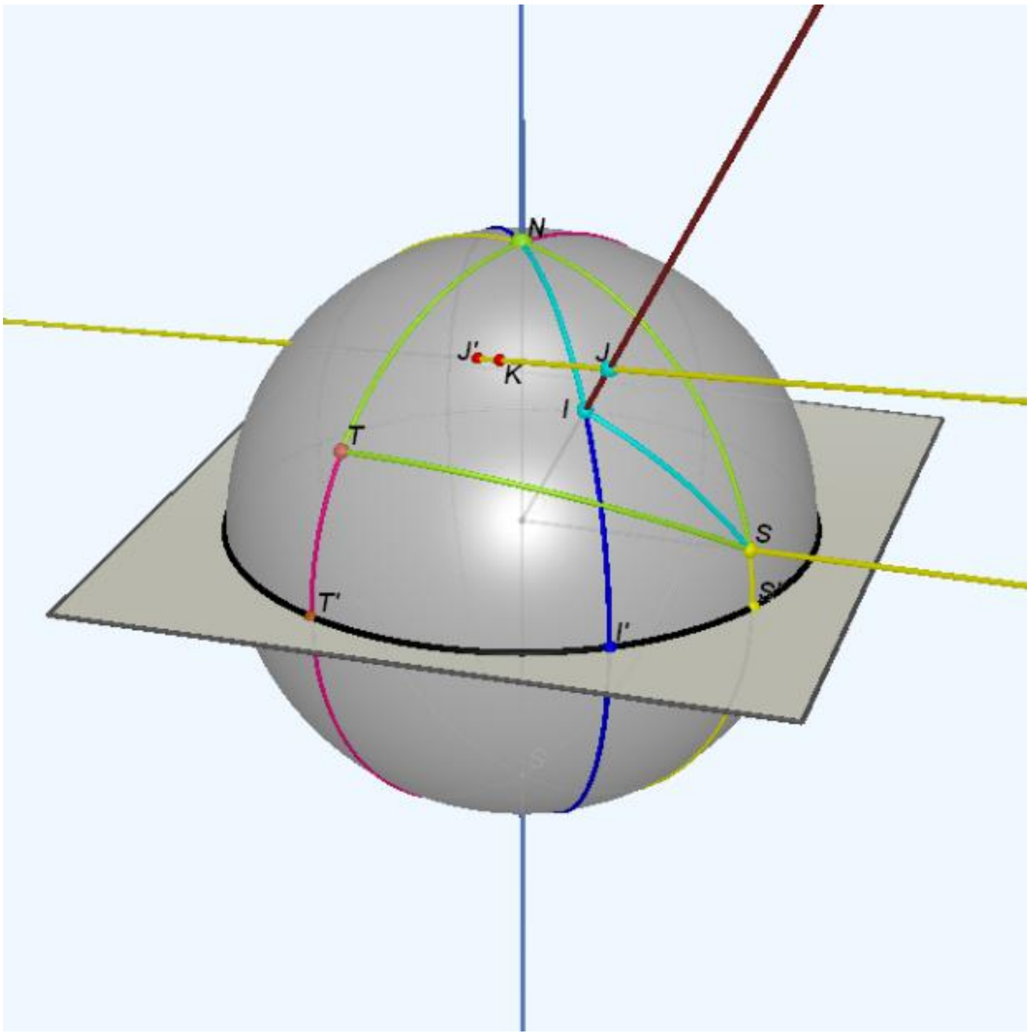


schéma 36

Utilisons les formules de Gauss de la trigonométrie sphérique :

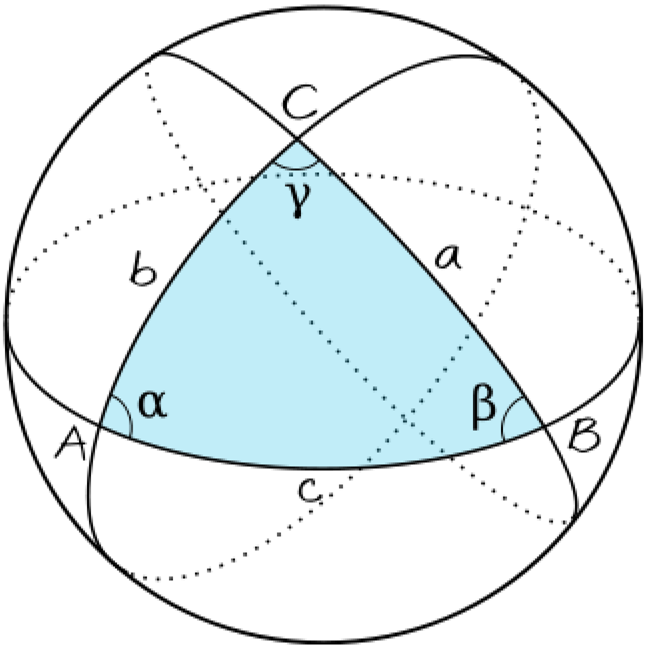


schéma 37

On a : **cos c = cosa cosb +sina sinb cosγ**

Appliquons cette relation au triangle sphérique **T N S** du schéma 36.

$\cos \vartheta = \cos(\pi/2 - l_t) \cos(\pi/2 - l_S) + \sin(\pi/2 - l_t) \sin(\pi/2 - l_S) \cos(\mathbf{L_T - L_S})$

D’où :

$$\boxed{\cos\theta = \sin(l_T)\sin(l_S) + \cos(l_T)\cos(l_S)\cos(L_T - L_S)}$$

L_T et L_S sont en mesure algébriques

On peut aussi obtenir l’angle de phase par les éphémérides de la lune de l’IMCCE http://vo.imcce.fr/webservices/miriade/?forms

b) Montrons que $\sin\alpha = \sin(l_I)\sin(l_S) + \cos(l_I)\cos(l_S)\cos(L_I - L_S)$

On peut ne pas supposer le plan de l’écliptique confondu avec le plan de l’équateur lunaire et suivre les explications avec le schéma 36.

Nous allons considérer le triangle sphérique NSI.

$\widehat{J'JI} = \widehat{JOS}$ comme angles alternes internes

Comme le triangle J’J I est rectangle en I l’angle $\widehat{J'JI}$ a pour mesure $\pi/2 - \alpha$

donc mesure $\overset{\frown}{IS} = \pi/2 - \alpha$

$\overset{\frown}{NI} = \pi/2 - l_I$

$\overset{\frown}{NS} = \pi/2 - l_S$

angle sphérique INS $= |L_I - L_S|$

Appliquons : **cos c = cosa cosb +sina sinb cosγ**

On a :

$\sin\alpha = \sin(l_I)\sin(l_S) + \cos(l_I)\cos(l_S)\cos(L_I - L_S)$

L_S et L_I sont en mesure algébriques

Annexe A http://vo.imcce.fr/webservices/miriade/?forms

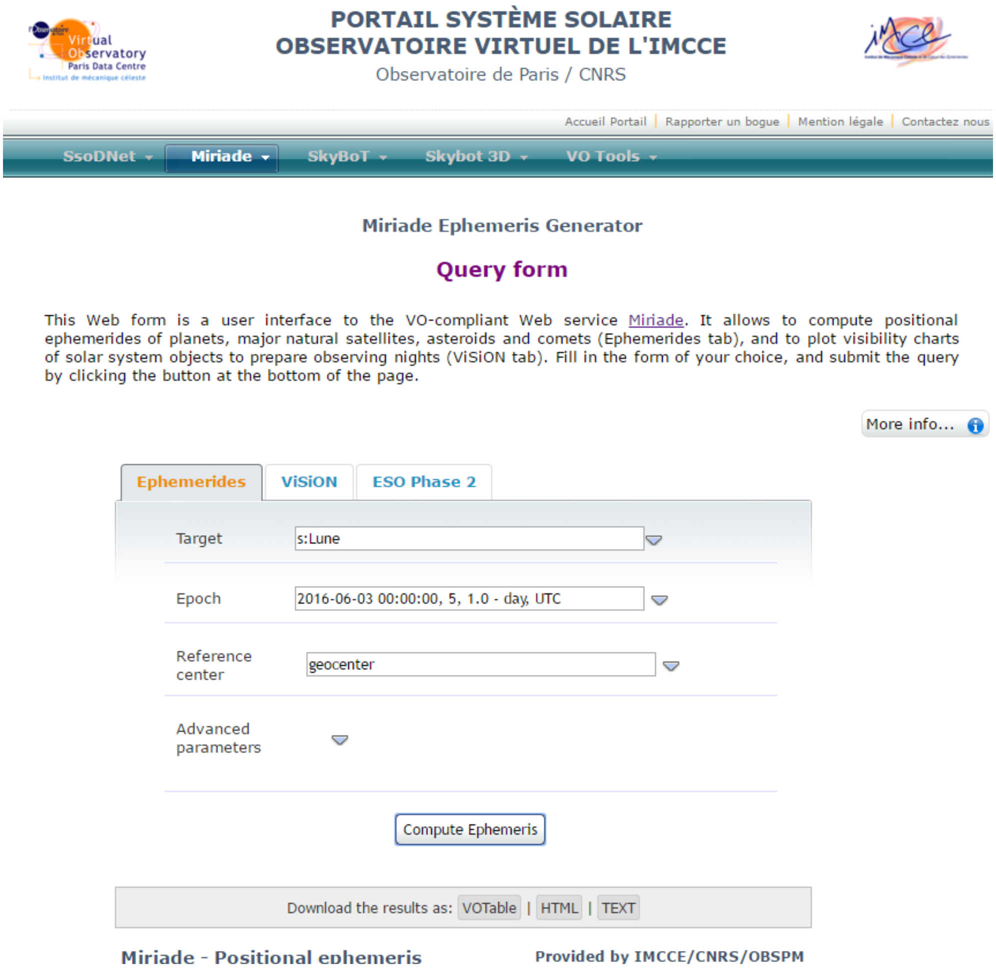


schéma 38

Satellite Moon

Target	Date	RA "h:m:s"	DEC "d:m:s"	Distance au	Mv	Phase deg	Elongation deg
Moon	2016-06-03T06:38:49.00	03 03 25.92084	+12 46 40.1927	0.002414136	-5.79	153.78	26.16
Moon	2016-06-04T06:38:49.00	04 03 46.69292	+15 49 39.7233	0.002417691	-2.91	167.22	12.75
Moon	2016-06-05T06:38:49.00	05 05 12.43899	+17 48 26.7019	0.002432063	0.37	174.55	5.43
Moon	2016-06-06T06:38:49.00	06 06 34.80491	+18 34 31.8245	0.002456371	-3.94	163.45	16.51
Moon	2016-06-07T06:38:49.00	07 06 36.43342	+18 07 59.5123	0.002488617	-6.16	150.51	29.43

schéma 39

Annexe B

Le classeur EXEL ***montagnes lunaires*** suivant permet de calculer la hauteur de la montagne en tenant compte de la sphéricité de la lune.

Deux options sont proposées pour l'angle de phase selon que l'on rentre l'information donnée par les éphémérides (en marron) ou que l'on rentre au préalable les longitudes et latitudes sélénographiques et dans ce cas la case en vert (angle de phase par calcul rad) est directement renseignée par EXCEL.

long du lieu deg		lat du lieu deg	
long soleil deg		lat soleil deg	
long terre deg		lat terre deg	
angle de phase par éphémerides deg			hauteur montagne en Km
90			angle de phase par éphémérides
			11,13
colongitude deg			
angle de phase par calcul rad		alpha deg	hauteur montagne en Km
1,570796327		10	angle de phase par calcul
			11,13
rayon lune en Km		ombre apparente en Km	
1738		64,22	

schéma 40

fin