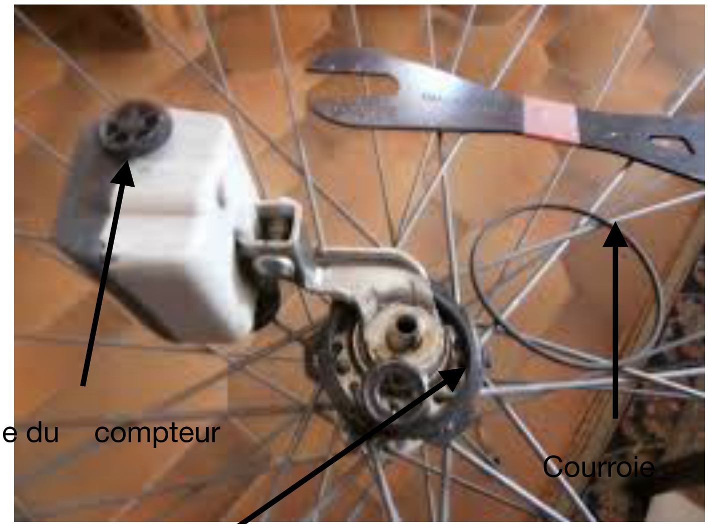
Une activité pour un élève de troisième ou du lycée



Poulie montée sur la roue

Introduction:

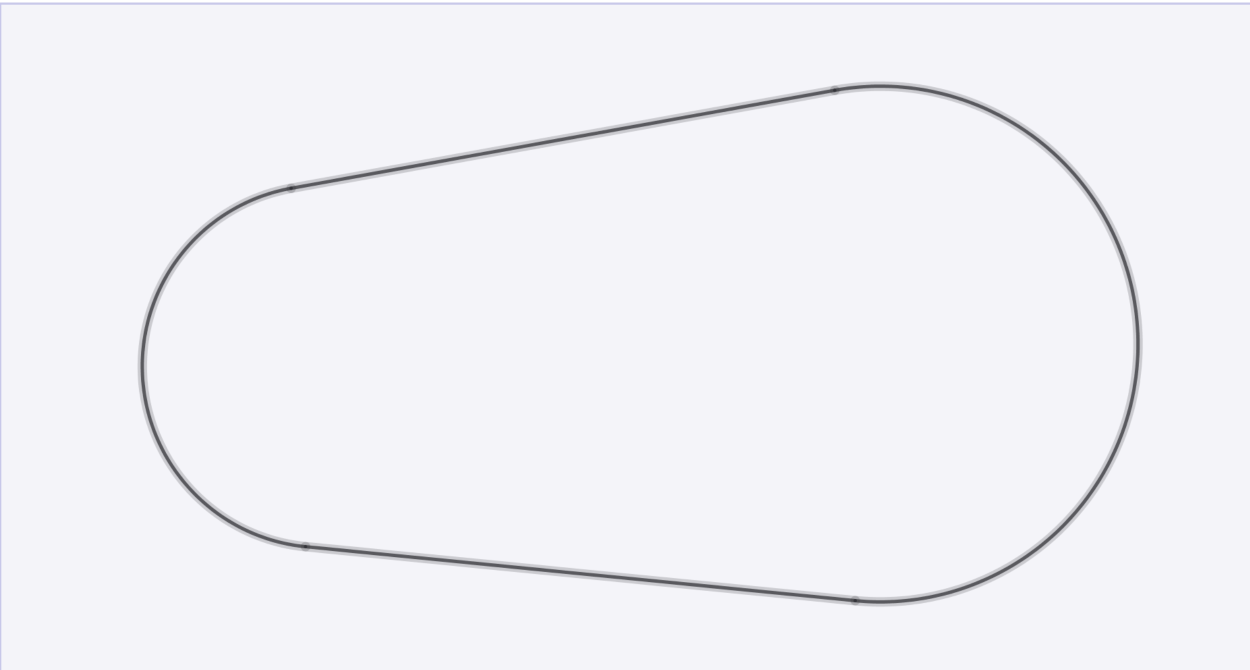
J'ai un vélo dit « vintage » sur lequel est monté un compteur kilométrique « d'époque », disons 1970, comme celui des photos ci dessus; le principe de fonctionnement est celui ci:
La poulie du compteur tourne entrainée par une courroie qui est entrainée par une poulie montée sur le moyeux de la roue avant, en fait le fonctionnement est le même que celui de la chaine de vélo, du plateau et du pignon arrière.
La courroie s'est cassée et, le compteur n'étant plus fabriqué, la courroie de rechange est introuvable.
On fabrique ce qu'on appelle des joints toriques dont l'aspect est celui de la courroie de la deuxième photos, sur mesures, ces joints toriques sont susceptibles de remplacer ma courroie cassée me dit on; je commande donc ces joints et la personne en charge de la commande me demande les diamètres des poulies et la longueur de l'entre axes, je la vois se livrer à un calcul, je pense alors qu'elle dispose d'une formule préenregistrée et qu'elle rentre les données pour avoir la longueur du joint torique.
Quand je monte le joint je constate qu'il n'est pas du tout adapté à mon compteur kilométrique, je demande à la personne en question si elle a appliqué une formule, la réponse est négative; son calcul est donc faux.
Là est l'origine de cette activité qui consiste à calculer la longueur du joint, la courroie.
Je ne cache pas qu'utiliser un fil qu'on enroule sur les 2 poulies va fournir approximativement la longueur de la courroie, mais l'exercice fournit une activité qui m'intéresse, activité, pour un élève de troisième, à plusieurs aspects: géométriques et calculatoire.
L'aspect géométrique peut être le prétexte à une initiation à un logiciel de géométrie qui, ici, est Géogébra.

1) Pour faire les calculs, il est nécessaire de construire, dans une première étape, une figure qui reproduise correctement les 2 poulies et la courroie, figure pas nécessairement aux bonnes dimensions, c'est l'objet de cette première partie.

a) Tracer une droite définie par 2 points C et D
b) Tracer la droite perpendiculaire à (CD) qui passe par C, Géogébra nomme f cette droite.
c) Tracer la droite perpendiculaire à (CD) qui passe par D, Géogébra nomme g cette droite.
d) Placer un point variable E sur f et un point variable F sur g.

e) Tracer les cercles de centre E qui passe par C et de centre F qui passe par D; Géogébra nomme respectivement c et d ces 2 cercles.
f) Placer le point I intersection du cercle d avec la droite (EF) et qui est dans le demi plan défini par la droite g et ne contenant pas E. Placer le point J intersection du cercle c avec la droite (EF) et qui est dans le demi plan défini par la droite f et ne contenant pas F
g) Tracer le symétrique de la droite (CD) par la symétrie d'axe (EF); Géogébra nomme i cette nouvelle droite.
h) Placer les points d'intersection respectifs de i avec les cercles c et d; on nomme G et H ces points.
i) Tracer l'arc de cercle du cercle c d'extrémités C et G contenant J et Tracer l'arc de cercle du cercle d d'extrémités D et H contenant I.
j) Tracer les segments CD et GH.
k) Cacher tout ce qui n'est pas l'un des 2 segments ou l'un des 2 arcs de cercle.
l) Faire afficher le graphique; la figure devrait être celle-ci:

Figure1



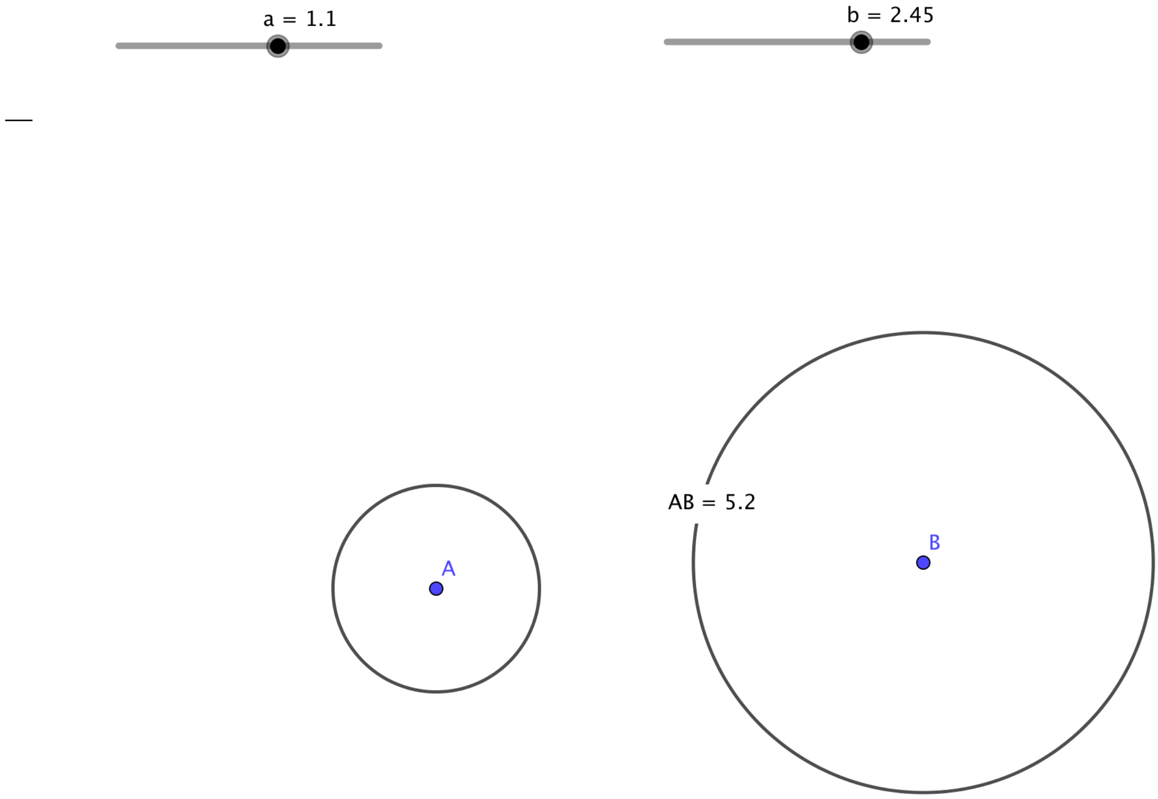
Cette figure représente la courroie montée dans laquelle on a caché les poulies.

2) <u>Le but de cette partie est de construire, en grandeurs réelles, la figure précédente en fonction des rayons a et b des poulies et de la distance entre les 2 axes des poulies (l'entre axes).</u>

On donne 2 points A et B et les cercles de centre A et de rayon a et de centre B et de rayon b. Pour a et b on utilise les curseurs de Géogébra.
Dans la figure suivante on a fait afficher les curseurs a et b, les 2 points A et B et les 2 cercles; a, b et la distance AB sont donc variables.
Faire varier ces paramètres en bougeant les curseurs et les points.

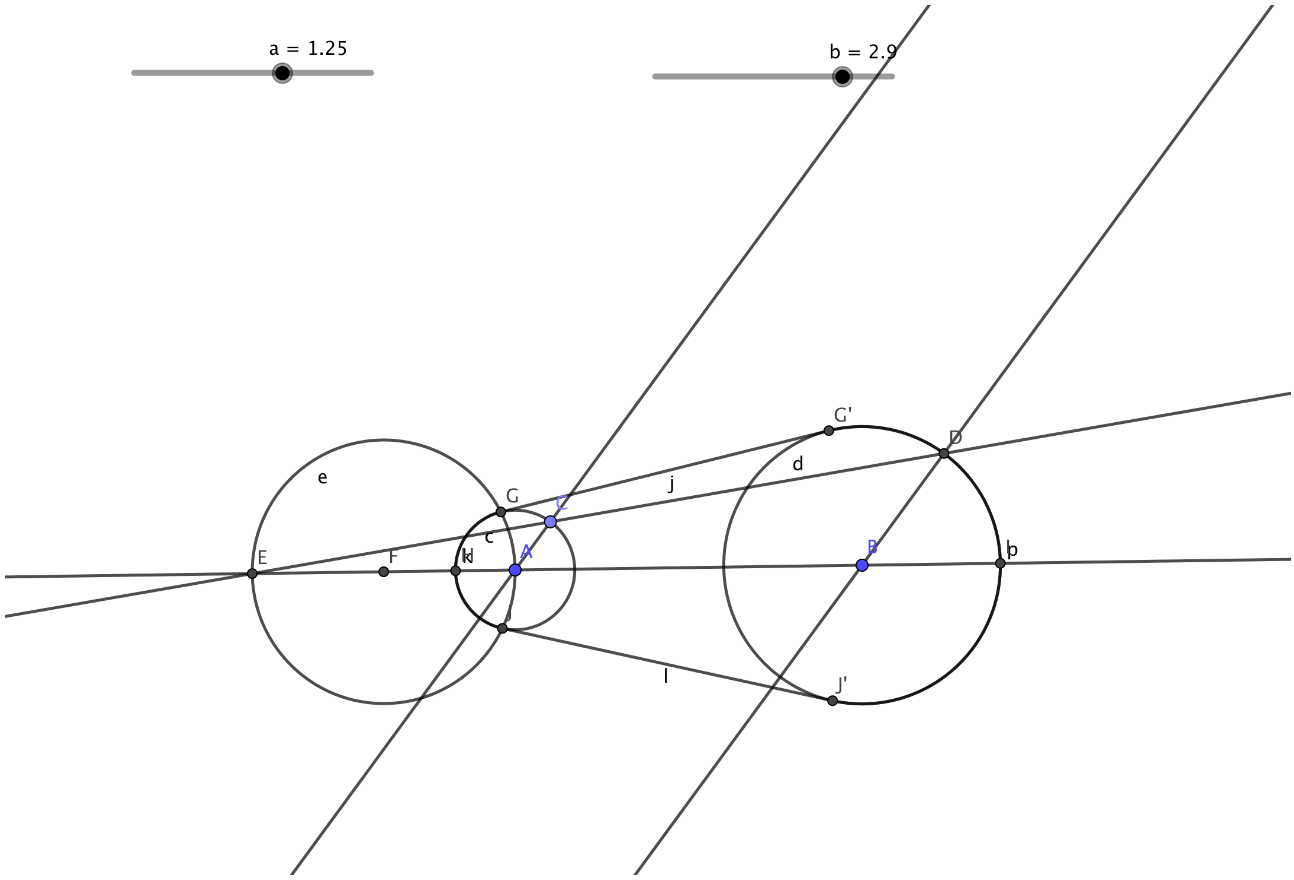
On cherche à construire les tangentes commune aux 2 cercles; il y en a 4, on commence par celles qui font tourner les poulies dans le même sens.

Figure 2

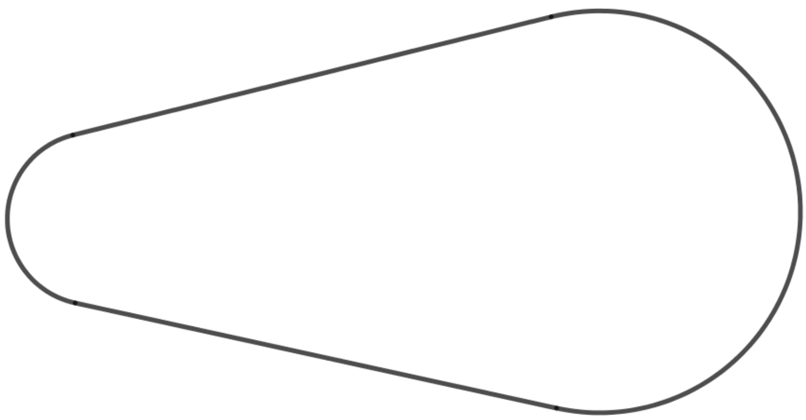


Géogébra nomme c le cercle de centre A et d celui de centre B.
On place un point arbitraire C sur c
Par B on mène la parallèle à (AC) qui coupe d en le point D qui est dans le même demi plan délimité par (AB) que C.
(CD) coupe (AB) (sauf cas exceptionnel qui est écarté) en un point E qui est le centre de l'homothétie qui envoie A sur B et C sur D, son rapport est b/a.
Le cercle de diamètre EA coupe c en G et J.
Les images de G et J par l'homothétie de centre E et de rapport b/a sont, respectivement, G' et J'
(GG') et (JJ') sont les 2 tangentes communes à e et d, la justification est à rechercher dans « cercle circonscrit à un triangle et triangle rectangle » et dans « propriétés des homothéties »; homothéties qui figurent maintenant dans le programme de la classe de 3^{eme}.
(AB) coupe c et d en H et I (comme sur la figure ci dessous; ces 2 points servent à construire les arc de cercles qui nous intéressent.
On construit l'arc de c GHJ et l'arc de d G'IJ'.
On construit les segments GG' et JJ'.
La figure correspondant à ces constructions est celle ci:

Figure 3



Maintenant on cache tout sauf les 2 arcs de cercles et les 2 segments:
Figure 4



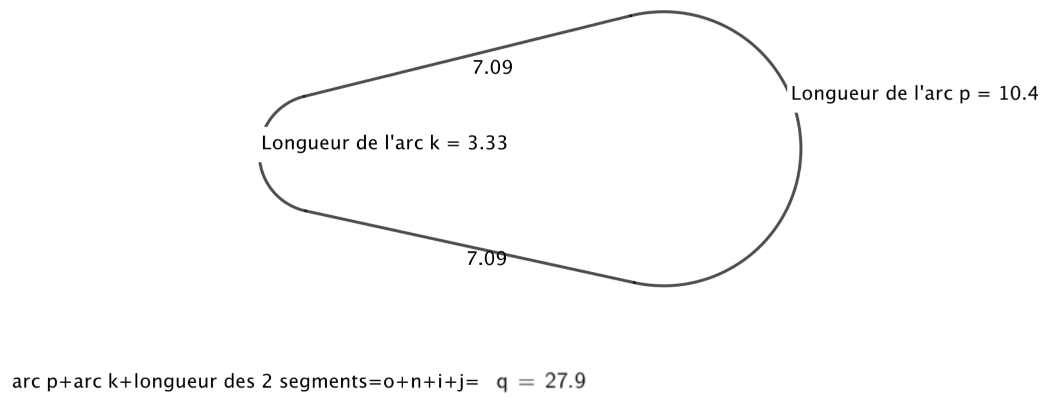
3) Dans cette partie on cherche à calculer le périmètre de la figure précédente.

Une activité pour un élève de troisième ou du lycée

a) on commence par demander à Géogébra de faire ce calcul, il suffit de faire la somme des 4 longueurs des 2 segments et des 2 arcs de cercles

On fait varier les curseur a et b et les points A et B pour constater que le périmètre q varie avec.

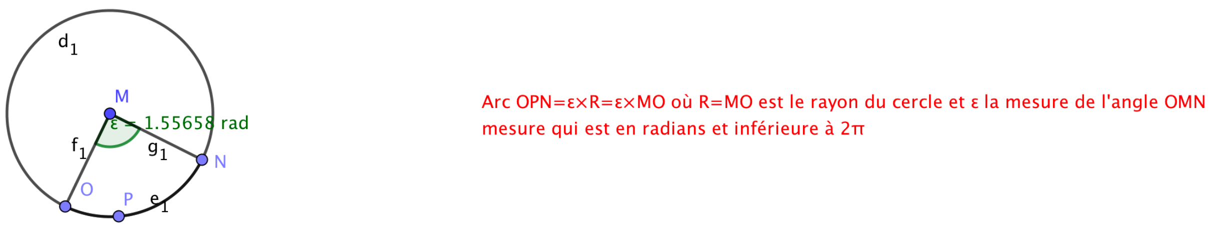
Figure 5



b) Pour faire les calculs on reprend la figure 3

Je me borne à proposer une démarche, qu'on n'est pas obligé de suivre, accompagnée d'indications qu'il faudra justifier.

L'élève aura besoin de la formule donnée dans la figure suivante, formule qu'il ne connait pas et dont on pourra faire remarquer que la formule « p=2ΠR » donnant le périmètre d'un cercle, qu'il connait, en est un cas particulier.



Les notations sont celles de la figure 3.

On rappelle que les données sont l'entre axes AB et les deux rayons a et b des deux poulies d'axes respectifs A et B.

* On commence par calculer EA en utilisant les propriétés de l'homothétie définie plus haut.
* On en déduit GG' puis l'angle GAJ puis l'arc GHJ puis l'arc G'IJ'.
* La longueur de la courroie n'est plus qu'une question d'addition.

On peut demander à l'élève de reprendre l'activité dans le cas où la courroie doit faire tourner les poulies dans le sens contraire.

<u>Annexe:</u>

échanges avec le comité de rédaction de MathémaTICE.

1) Pour l'analyse mathématique de la situation, outre la trigonométrie et l'homothétie que vous citez, je vois "tangente à un cercle" et "cercle circonscrit à

un triangle et triangle rectangle", je vois aussi la construction des tangentes communes à 2 cercles dont l'activité fournit une application concrète.
2) Bien sûr il n'est pas question de chercher une justification rigoureuse au calcul d'un angle à partir d'une ligne trigonométrique, un élève de troisième ne se posera pas la question, il s'agit de procéder comme quand j'étais élève et qu'on nous faisait lire les tables trigonométriques "dans les 2 sens », ces tables étant maintenant remplacées par les calculatrices.
3) Pour l'apport spécifique de l'outil TICE:
a) Une figure qui peut permettre de faire les calculs est difficile à réaliser avec "papier crayon", du moins j'ai eu du mal et j'ai ressenti le besoin de passer par un logiciel; de plus pour faire cette figure les propriétés mathématiques nécessaires s'imposent naturellement à l'élève (tangente, triangle rectangle et cercle circonscrit....)
b) Cette activité peut être le support à une initiation à Geogebra; je signale à ce propos que le logiciel avec lequel je suis familier est "CABRI" mais comme je n'y ai plus accès j'ai été obligé d'utiliser Geogebra, qui ne m'est pas familier, et maintenant que l'activité est au point je me sens beaucoup plus à l'aise avec ce logiciel.
L'activité peut être proposée à l'élève pour être réalisée chez lui (ou bien ailleurs) à son rythme, un des buts essentiels étant que l'élève s'accapare l'outil Geogebra. Avec le même objectif, elle peut être proposée à la classe en salle informatique en plusieurs séquences.
4) Toujours dans le cadre l'apport spécifique de l'outil TICE je propose une variante du fichier Geogebra « joint torique 2 et 3a » qui va calculer, uniquement avec l'outil « distance ou longueur » du logiciel, la longueur de la courroie.
Ce nouveau fichier pourrait être à l'usage de la personne qui prend les commandes de ces courroies (ou joint torique comme elle les appelle) et qui ne sait pas faire le calcul ou bien à l'usage d'un professeur d'atelier d'un lycée professionnel …..
Le principe du nouveau fichier est de calculer, de façon interactive, la longueur de la courroie en fonction des paramètres a, b, c qui sont, respectivement, les rayons des deux poulies et l'entre axe; a, b, c sont trois curseurs de Geogebra.
La figure ci dessous est une copie d'écran de la fenêtre Geogebra obtenue avec ces trois valeurs de a, b,c.