Compte-rendu de la séance menée à l'école Aristide Briand le 30 septembre 2024

La séance s'est déroulée en 3 phases :

1. verbalisation de la table de 2 avec rappel sur le mot *moitié*
2. création d'une proportion aléatoire sur le modèle de Bernoulli-Condorcet et verbalisation de cette proportion sous forme d'une fraction
3. manipulation sur le modèle de Bernoulli-Condorcet pour représenter la fraction $\frac{1}{2}$

1 Table de 2

Le livret des tables de multiplication façon Bernelin a été distribué aux élèves (il restera dans les pochettes tout au long de l'année scolaire). La page sur la table de 2 a été lue à voix haute (et parfois récitée) par les élèves volontaires. Elle est rédigée par Bernelin sans utiliser le mot *fois* :

1. Le double de 1 est 2.
2. Le double de 2 est 4.
3. Le double de 3 est 6.
4. Le double de 4 est 8.
5. Le double de 5 est 10.
6. Le double de 6 est 12.
7. Le double de 7 est 14.
8. Le double de 8 est 16.
9. Le double de 9 est 18.

Certains élèves, en cherchant à éviter de lire, ont montré des erreurs sur la table, avec des choses comme *le double de 7 est 16*.
Ensuite, il a été demandé de redire ces faits numériques mais en inversant le rôle du sujet et du complément. On pouvait s'aider du livret mais il fallait changer les mots. La nouvelle table de 2 est :

1. La moitié de 2 est 1.
2. La moitié de 4 est 2.
3. La moitié de 6 est 3.
4. La moitié de 8 est 4.
5. La moitié de 10 est 5.
6. La moitié de 12 est 6.
7. La moitié de 14 est 7.
8. La moitié de 16 est 8.
9. La moitié de 18 est 9.

Là, les (rares) erreurs ont surtout été des confusions de vocabulaire comme *La moitié de 4 est 8*.
Il a été dit (mais pas écrit) que le mot *moitié* désigne une fraction.

2 Verbalisation des fractions

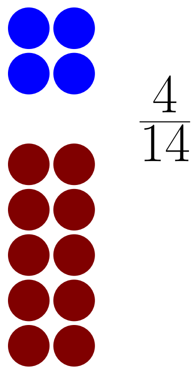
L'urne de Condorcet a été remplacée par une boîte (par élève) transparente (par exemple une barquette) et des jetons bleus, puis rouges, ont été placés aléatoirement dans les boîtes. Chaque élève avait donc, *a priori*, une fraction différente de celle des voisins.
La consigne était de compléter la phrase suivante, en adéquation avec les quantités de jetons dans la boîte :

> ... jetons sur ... sont bleus.

Les points de suspensions étant à compléter par des chiffres.
Note : la formulation choisie est maladroite parce que l'adjectif *bleu* est à la fin de la phrase (attribut du sujet écrit en chiffres) ce qui introduit une confusion. D'autres manières de formuler auraient été :

- Parmi ... jetons, ... sont bleus.
- Il y a ... jetons bleus sur ... jetons.
- Sur ... jetons, ... sont bleus.

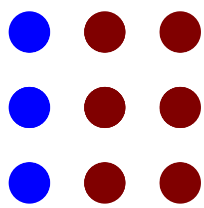
Par souci de cohérence avec la notation des fractions, il vaut cependant mieux commencer la phrase par les jetons bleus, donc par *il y a*.
Au début, plusieurs élèves ont compté (et écrit) les jetons rouges, au lieu du total des jetons. Quand ils ont compris la consigne, ils ont eu l'occasion de pratiquer l'addition.
Deux élèves ont décrété que les jetons rouges étaient des dizaines et ont écrit par exemple le nombre 63 au lieu de $\frac{3}{9}$.
Une élève a trouvé, sans même l'aide de l'AESH, une manière d'écrire la fraction :



Sur son ardoise on pouvait lire :

> 4 jetons sur 14 sont bleus.

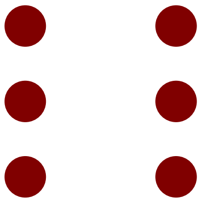
De fait, le mot *sur* suggère qu'on écrive le nombre 4 plus haut que le nombre 14.
Mais surtout, elle a disposé (probablement par souci d'esthétisme) une manière de disposer les jetons en deux groupes similaires, ce qui montre visuellement que les fractions $\frac{2}{7}$ et $\frac{4}{14}$ sont en réalité deux écritures différentes d'une même fraction : il y a plusieurs manières de verbaliser la proportion de jetons bleus dans la boîte ci-dessus.
Ici on voit deux manières de décomposer la proportion $\frac{3}{9}$:



On peut, comme avec la fraction $\frac{4}{14}$ ci-dessus, restructurer la boîte en trois lignes identiques, chacune représentant la fraction $\frac{1}{3}$ (car dans chacune, il y a 1 jeton bleu sur 3 jetons) :

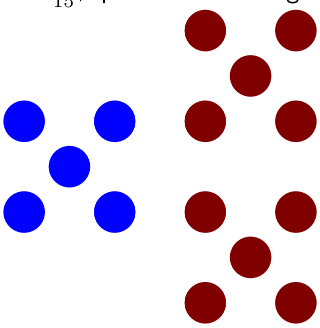
Mais on peut également restructurer la boîte en 3 colonnes uniformément colorées, l'une

formée de 3 jetons bleus, et les deux autres

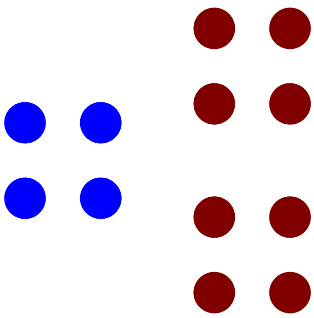


formées chacune de 3 jetons rouges. Ce qui permet de revoir la fraction $\frac{3}{9}$ (3 jetons sur 9 sont bleus) comme $\frac{1}{3}$ (un groupe - de 3 jetons - sur 3 groupes, est bleu).
Cette représentation de fractions sous forme de groupes, a été préférée par plusieurs élèves.

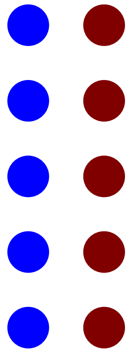
- Avec la fraction $\frac{5}{15}$, que l'on voit ici égale à $\frac{1}{3}$:

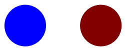


- Avec la fraction $\frac{4}{12}$, que l'on voit ici être aussi égale à $\frac{1}{3}$:



- Avec la fraction $\frac{5}{10}$, que l'on voit ici égale à $\frac{1}{2}$:



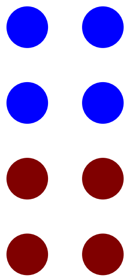
Mais là, on le voit aussi de deux manières : soit en 5 lignes  où un jeton est bleu sur 2 jetons, soit en deux groupes de 5 dont un est bleu.

3 Retour sur la moitié

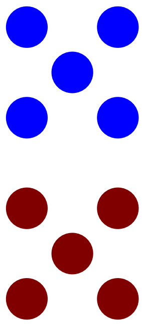
Lors de la troisième étape (donc celle où l'attention n'était plus à son maximum), la consigne est devenue :

> Enlever des jetons de la boîte, de telle manière que la moitié d'entre eux soient bleus.

Il y a eu de belles réalisations :



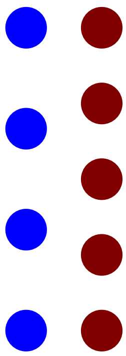
(la fraction $\frac{4}{8}$: *4 est la moitié de 8*)



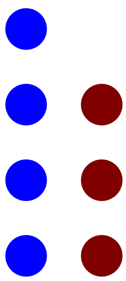
(la fraction $\frac{5}{10}$: *5 est la moitié de 10*)
et même :

(la fraction $\frac{1}{2}$: 1 est la moitié de 2)
Ces fractions viennent d'élèves qui ont à l'évidence compris que *la moitié des jetons sont bleus* est synonyme de *il y a autant de jetons bleus que de jetons rouges*.
La vérification collective s'est faite par la relecture de la page du livret consacrée aux doubles et moitiés.
Mais même en admettant qu'on cherche à avoir autant de jetons bleus que de jetons rouges dans la boîte, il y a eu des erreurs d'estimation. Dans plusieurs cas, le nombre de jetons

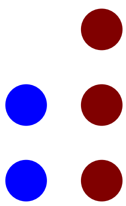
bleus n'était pas le même que le nombre de jetons rouges, et les élèves ont eu du mal à trouver comment faire pour qu'il y ait égalité.
Il est possible que les élèves aient cherché à estimer le *nombre* de jetons bleus par la *longueur* de l'alignement :



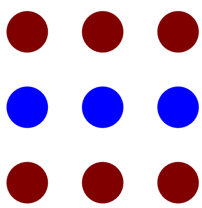
Mais cela est surprenant en CE2, puisque d'après Papert et Minsky ce serait vers l'âge de 6 ans qu'on apprend à comparer les nombres par comptage plutôt que par estimation d'une grandeur géométrique. Et les élèves de CE2 savent compter. De plus, il y a eu des erreurs même lorsque les jetons étaient alignés :



Ci-dessus on *voit* qu'il y a (un de) plus de jetons bleus que de jetons rouges. Mais l'élève ne l'avait pas vu puisqu'il était persuadé qu'il y en avait autant d'une couleur que de l'autre. Pour corriger son erreur il a enlevé 2 jetons bleus :

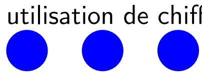
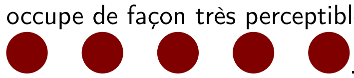


et, là encore, estimé qu'il y avait autant de jetons bleus que de jetons rouges. Dans ce cas, la surprise est accentuée par le fait que selon la théorie de la subitisation, les nombres 2 et 3 se reconnaissent sans comptage.
Enfin, ici, la recherche esthétique l'a emporté sur celle de l'équité entre bleus et rouges. L'élève était persuadée que la *moitié* des jetons étaient bleus :



4 Conclusion (provisoire)

Cette activité a permis de faire les constats suivants :

- Les fractions sont abordables en début de CE2, tout au moins celles qui ont un petit dénominateur.
- Les fractions, ce n'est pas seulement des maths, c'est aussi du français (vocabulaire avec *double* et *moitié*, grammaire avec la place des adjectifs comme *trois* ou *bleus*).
- Compléter une phrase à trous est un exercice difficile pour certains des élèves de début de CE2.
- Globalement, les élèves de CE2 connaissent assez bien la table de 2.
- La distinction entre le ratio *5 contre 10* et la fraction *5 sur 15* n'est pas toujours très nette. En particulier le lien entre *la moitié sont bleus* et *il y a autant de bleu que de rouge* n'a pas toujours été perçu spontanément.
- Les stratégies de dénombrement sont diverses : comptage de tous les jetons, comptage des jetons par couleur puis addition, regroupement en quinaires ou autres motifs.
- La comparaison de nombres entiers ne semble pas plus facile que celle de mesures (longueurs, aires) malgré la possibilité (avec les nombres entiers) d'associer les jetons par couleur pour voir s'il y en a plus d'une couleur (ceux qui ne sont pas appariés). Cette comparaison (dire s'il y a plus de jetons rouges ou de jetons bleus) est difficile même avec des petits nombres, censés être subitisés. Ce phénomène, surprenant, laisse penser que la relation d'ordre n'est pas maîtrisée, et pas seulement parce qu'on a du mal à comparer des chiffres qui sont abstraits.
  Par exemple, $3 < 5$ alors que visuellement 3 occupe plus d'espace que 5 mais là, il n'y a pas directement utilisation de chiffres, et
  
  occupe de façon très perceptible plus d'espace que
  .
  Ainsi, même en l'absence de conflit entre différents mode de représentation des nombres entiers, leur grandeur est difficilement perçue. Il n'est pas exclu que des difficultés similaires apparaissent lors de la comparaison de grandeurs continues.

Alain Busser
IREMI 974