

# Antilles-Guyane Juin 2017

## Exercice 2

Un particulier possède une piscine et décide de s'équiper d'un système automatique de remplissage pour tenir compte de l'évaporation pendant la période estivale. Sur un site spécialisé, il apprend que les conditions climatiques dans sa région pendant cette période sont telles qu'il peut prévoir une évaporation quotidienne de 4 % de la quantité d'eau. Il décide alors de régler son système de remplissage automatique à un apport de  $2\text{ m}^3$  d'eau par jour.

Le premier jour de la mise en fonctionnement du système automatique de remplissage, la piscine contient  $75\text{ m}^3$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $u_n$  le volume d'eau dans la piscine, exprimé en mètre cube ( $\text{m}^3$ ),  $n$  jours après la mise en fonctionnement du système automatique de remplissage.

Ainsi,  $u_0 = 75$ .

1. Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .
2. Justifier que la suite  $(u_n)$  n'est pas arithmétique. Est-elle géométrique ?
3. Justifier que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = 0,96 \times u_n + 2$ .
4. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $v_n = u_n - 50$ .
  - a. Montrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 0,96 et de premier terme  $v_0$ .
  - b. Pour tout entier naturel  $n$ , exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .
  - c. En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 25 \times 0,96^n + 50$ .
  - d. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$  et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
5. Si le volume d'eau dans la piscine est inférieur à  $65\text{ m}^3$ , le niveau de l'eau est insuffisant pour alimenter les pompes de filtration ce qui risque de les endommager. Pour connaître le nombre de jours pendant lesquels le niveau d'eau reste suffisant sans risquer de panne en conservant ce réglage, on construit l'algorithme suivant :

```
L1 U ← 75
L2 N ← 0
L3 Tant que U .....
L4   U ← .....
L5   N ← N + 1
L6 Fin tant que
```

- a. Recopier et compléter les lignes L3 et L4 de cet algorithme.
- b. Quelle est la valeur de N calculée à la fin de cet algorithme ?
- c. Pendant combien de jours le niveau de l'eau est-il suffisant si on conserve ce réglage ?