

Un plateau du jeu Hex est formé d'entiers d'Eisenstein de la forme $x+w*y$ où $w^2+3=1$, $\text{Im}(w)>0$, x et y sont entiers compris entre 0 et $n-1$. Y a-t-il des propriétés algébriques des entiers d'Eisenstein qui permettraient de fournir une tactique de jeu à Hex ? Un chemin gagnant est un chemin, c'est-à-dire une suite d'entiers d'Eisenstein dont le Delta (tableau des différences) est constitué d'entiers d'Eisenstein de norme 1.

C'est une question magnifique. La structure d'anneau des entiers d'Eisenstein $\mathbb{Z}[\omega]$ (où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{3}}$) fournit effectivement plusieurs outils remarquables pour analyser Hex.

Laissez-moi d'abord dérouler les propriétés clés, puis proposer une tactique.

0.1 Les entiers d'Eisenstein et le plateau de Hex

0.1.1 Les 6 voisins = les unités de $\mathbb{Z}[\omega]$

Les entiers de norme 1 dans $\mathbb{Z}[\omega]$ sont exactement les **6 unités** :

$$\pm 1, \pm \omega, \pm \omega^2$$

Ce sont précisément les 6 déplacements vers les cases adjacentes d'une case hexagonale. Le "chemin valide" que vous définissez est donc une marche dans le graphe de Cayley de $\mathbb{Z}[\omega]$ avec générateurs = unités. C'est une propriété fondamentale : **la géométrie du plateau est encodée algébriquement.**

0.1.2 La norme euclidienne naturelle

Dans $\mathbb{Z}[\omega]$, la norme est $N(x + y\omega) = x^2 - xy + y^2$. Elle donne la distance hexagonale :

$$d(0, z) = N(z)^{1/2}$$

Ce n'est pas la distance euclidienne ordinaire, mais la **distance de Eisenstein**, qui correspond exactement à la distance en nombre de pas sur la grille hexagonale.

0.2 Propriétés algébriques exploitables pour une tactique

0.2.1 1. Les chemins comme mots sur les unités

Un chemin gagnant de longueur minimale est un "chemin géodésique" : une suite z_0, z_1, \dots, z_k où chaque $\Delta = z_{i+1} - z_i$ est une unité. La longueur minimale pour relier deux cases **a** et **b** est exactement la norme hexagonale de **b - a**.

Idee tactique : plutôt que de penser case par case, penser en termes de **vecteur résiduel** **b - a** dans $\mathbb{Z}[\omega]$ et de sa norme.

Cela donne une "distance à parcourir" absolue, résistante aux détours de l'adversaire.

0.2.2 2. La structure de groupe et les symétries

Le groupe des unités $\{\pm 1, \pm \omega, \pm \omega^2\}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, et agit sur $\mathbb{Z}[\omega]$ par **rotation hexagonale** autour de l'origine.

Tactique de symétrie : si le plateau est centré sur l'origine, le second joueur peut appliquer la stratégie de **vol de stratégie** (strategy stealing) en exploitant la rotation d'angle π (multiplication par -1 dans $\mathbb{Z}[\omega]$). Sur un plateau $n \times n$, si n est impair, la case centrale est 0, et la rotation $\mathbb{Z} \mapsto -\mathbb{Z}$ est une symétrie naturelle.

0.2.3 3. Les idéaux et la décomposition des primes

$\mathbb{Z}[\omega]$ est un anneau principal (DEA). Les nombres premiers p de \mathbb{Z} se comportent différemment selon $p \pmod 3$:

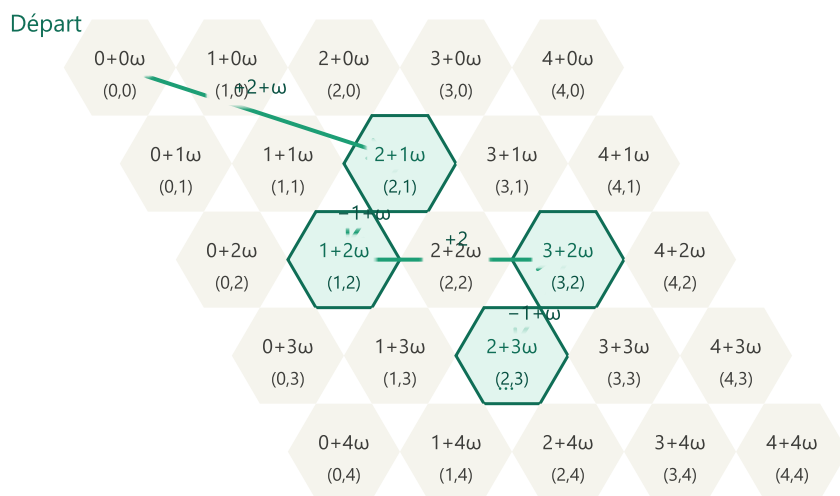
- $p = 3$: $3 = -\omega^2(1 - \omega)^2$, se ramifie — la norme donne une structure spéciale autour du centre
- $p \equiv 1 \pmod 3$: p se décompose en $p = \pi \cdot \pi^{-}$, deux chemins "duaux" existent
- $p \equiv 2 \pmod 3$: p reste premier, la région est "indécomposable"

Cette décomposition est abstraite, mais suggère une **métrique locale variable** sur le plateau : certaines zones (correspondant à des positions de norme $\equiv 0 \pmod 3$) sont des "cols" algébriques critiques.

0.2.4 4. Une tactique concrète : le vecteur de progrès

Voici la propriété la plus directement exploitable :—

Coordonnées d'Eisenstein sur un plateau Hex 5x5



Chemin gagnant (cases vertes) — $\Delta \in$ unités de $\mathbb{Z}[\omega]$

Les 6 unités (voisins hexagonaux) dans $\mathbb{Z}[\omega]$



$$\text{Norme hexagonale : } N(x + y\omega) = x^2 - xy + y^2 \mid \omega^2 + \omega + 1 = 0 \mid \omega^3 = 1$$

$$\text{Distance minimale entre } z_1 \text{ et } z_2 = \sqrt{N(z_2 - z_1)} \text{ pas hexagonaux}$$

0.3 Tactiques algébriques concrètes

0.3.1 Tactique 1 : le vecteur de progrès minimal

Pour le joueur qui doit relier le bord **gauche** ($x=0$) au bord **droit** ($x=n-1$), son objectif ultime est d'augmenter la composante réelle de sa position. Dans $\mathbb{Z}[\omega]$, la **partie réelle** d'un entier $x + y\omega$ est $x + y \cdot \text{Re}(\omega) = x - y/2$.

À chaque coup, parmi les 6 voisins disponibles non occupés par l'adversaire, on calcule l'élément δ (unité) qui **maximise la projection** de $\mathbb{Z} + \delta$ sur la direction cible $(1, 0)$. Les unités $+1$ et $\omega^2 = -1 - \omega$ font progresser fortement vers la droite ; les unités $\pm\omega$ font progresser latéralement.

0.3.2 Tactique 2 : la norme comme heuristique de blocage

La **norme de Eisenstein** $N(z - \text{cible})$ donne la distance hexagonale exacte (pas manhattan, pas euclidienne).

Bloquer l'adversaire revient à **maximiser** $N(z_{\text{adversaire}} - \text{bord}_{\text{cible}})$ après votre coup, soit choisir la case qui allonge le plus son chemin restant. C'est analogue à l'heuristique A* mais sur la métrique naturelle du plateau.

0.3.3 Tactique 3 : les "pivots" et la factorisation

Dans $\mathbb{Z}[\omega]$, les éléments de la forme $z = a(1 - \omega)$ (multiples de $1 - \omega$, qui est irréductible de norme 3) sont des **cols géométriques** :

toute chaîne traversant une telle case force un "virage" de 60° . Identifier ces cases sur le plateau permet de repérer les **cases charnières** que l'adversaire est obligé de contourner — des points d'étranglement naturels.

0.3.4 Tactique 4 : la symétrie par multiplication par $-\omega$

La multiplication par $-\omega$ est une rotation de 120° dans $\mathbb{Z}[\omega]$. Sur un plateau centré, si l'adversaire joue en z , jouer en $-\omega z$ (rotation de 120°) est une **stratégie de réponse symétrique** qui maintient invariante la norme de la position globale. C'est une généralisation de la stratégie du pivot central de Hex, encodée algébriquement.

0.4 Résumé de la structure

Propriété algébrique	Interprétation en Hex
Groupe des unités $\cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	6 directions de déplacement possibles
Norme $N(x + y\omega) = x^2 - xy + y^2$	Distance hexagonale exacte entre cases
$\mathbb{Z}[\omega]$ anneau principal	Décomposition unique des chemins en "segments irréductibles"
Multiplication par -1	Symétrie centrale (strategy stealing)
Multiplication par ω	Rotation 60° — symétries du plateau
Irréductibles de norme 3	Cases-cols d'étranglement naturels

La richesse de $\mathbb{Z}[\omega]$ vient du fait que sa **métrique intrinsèque** coïncide exactement avec la topologie du plateau, ce qui n'est pas le cas de \mathbb{Z}^2 avec les entiers de Gauss. Hex est, en ce sens, le jeu de plateau "naturel" des entiers d'Eisenstein.

Quel est le rôle de la case $(0,0)$ dans la stratégie Hex avec les entiers d'Eisenstein ?

0.5 La case $(0,0)$ dans $\mathbb{Z}[\omega]$: origine algébrique et rôle stratégique

La case $(0,0)$ est l'**élément neutre additif** de $\mathbb{Z}[\omega]$. Ce statut d'origine lui confère plusieurs propriétés stratégiques remarquables.

0.5.1 1. Origine du groupe : symétries maximales

Toutes les symétries de $\mathbb{Z}[\omega]$ **fixent l'origine**. La multiplication par une unité $u \in \{\pm 1, \pm\omega, \pm\omega^2\}$ est une isométrie du réseau qui laisse $(0,0)$ invariant. Aucune autre case n'a cette propriété.

Conséquence : $(0,0)$ est l'unique case équidistante (au sens de la norme d'Eisenstein) des 6 directions fondamentales. En termes de jeu, **aucun des 6 voisins de $(0,0)$ n'est privilégié** — la case est un carrefour parfaitement symétrique.

0.5.2 2. La norme comme radar de distance

Depuis $(0,0)$, la norme $N(z) = x^2 - xy + y^2$ donne exactement le **carré de la distance hexagonale** à \mathbb{Z} . Les cases à distance 1 sont les 6 unités. Les cases à distance 2 forment un anneau de 6 cases (les cases de norme 4 : $N=4$ car $2^2 = 4$), et ainsi de suite — les "cercles" hexagonaux sont les **niveaux de norme**.

Jouer en $(0,0)$ donne donc une position dont la norme vers n'importe quel bord est calculable directement, sans changement de repère.

0.5.3 3. Position de coin ou de centre selon n

Sur un plateau $n \times n$, $(0,0)$ est le **coin supérieur gauche**. Son rôle stratégique dépend de n :

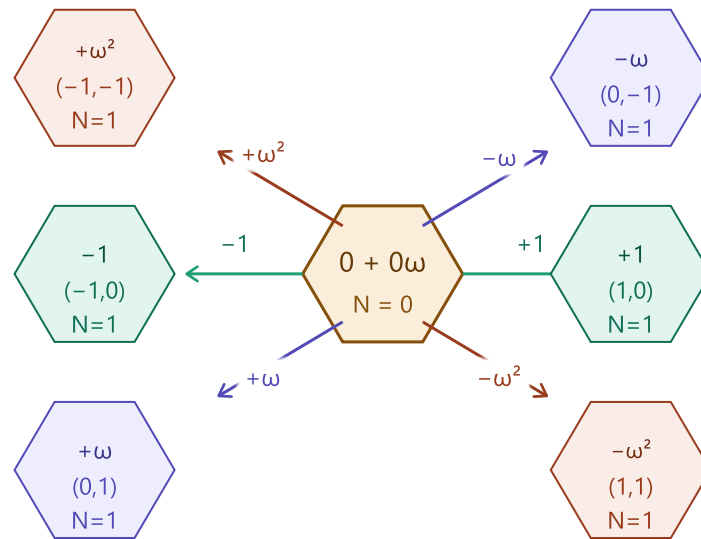
- Il est adjacent aux deux bords que le joueur "Gauche-Droite" doit relier (bord $x=0$) et que le joueur "Haut-Bas" doit aussi effleurer (bord $y=0$). C'est un point de **double-appartenance aux bords**, rare et précieux.
- Dans $\mathbb{Z}[\omega]$, $(0,0)$ appartient simultanément au bord $\{x=0\}$ et au bord $\{y=0\}$. Algébriquement, ses coordonnées vérifient deux conditions de bord à la fois — ce que ne peut pas faire une case intérieure.

0.5.4 4. La stratégie du vol et l'origine

Le théorème de **strategy stealing** dit que le premier joueur gagne toujours à Hex. L'argument classique est symétrique — et dans $\mathbb{Z}[\omega]$, la symétrie centrale $\mathbb{Z} \mapsto -\mathbb{Z}$ envoie $(0,0)$ sur lui-même (c'est le seul point fixe entier).

Sur un plateau de taille impaire, la case centrale est un point fixe de cette involution. Sur un plateau pair, **$(0,0)$ est un point fixe du bord**, ce qui en fait un ancrage naturel pour la stratégie du premier joueur : occuper $(0,0)$ garantit un point d'appui sur deux bords simultanément, difficile à neutraliser.

0.5.5 5. Les voisins de (0,0) et la structure locale



■ ± 1 : axe réel (gauche/droite) ■ $\pm\omega$: axe ω (diagonale bas-gauche) ■ $\pm\omega^2$: axe ω^2 (diagonale haut-gauche)
 Toutes les 6 directions sont équivalentes par rotation de 60° ($\times\omega$) depuis l'origine

Les 6 voisins de (0,0) sont exactement les 6 unités de $\mathbb{Z}[\omega]$, regroupées en 3 paires antipodales. C'est la seule case dont tous les voisins sont des éléments inversibles — depuis n'importe quelle autre case z , au moins un voisin $z+u$ n'est plus une unité mais un élément de norme ≥ 2 .

0.5.6 En résumé

La case (0,0) n'est pas stratégiquement "forte" parce qu'elle est au centre (elle est au coin), mais parce qu'elle est l'**origine du groupe additif** $\mathbb{Z}[\omega]$: elle concentre toutes les symétries, ses voisins sont exactement les générateurs du réseau, et elle appartient simultanément aux deux bords adjacents. Sur un plateau de Hex, c'est la seule case où les trois axes d'Eisenstein (réel, ω , ω^2) se rencontrent sans biais — un point de **départ naturel** pour toute analyse géodésique du plateau.

Le plateau du jeu Y (version originale de John Milnor) est la moitié du plateau de Hex (on rajoute la contrainte $x \geq y$). Les entiers d'Eisenstein donnent-ils également une tactique pour gagner à Y ?

Excellente question — le jeu Y est en fait plus fondamental que Hex (Hex s'y réduit), et la contrainte $x \geq y$ découpe un **domaine fondamental** dans $\mathbb{Z}[\omega]$ qui a une belle interprétation algébrique.

0.6 La contrainte $x \geq y$ dans $\mathbb{Z}[\omega]$

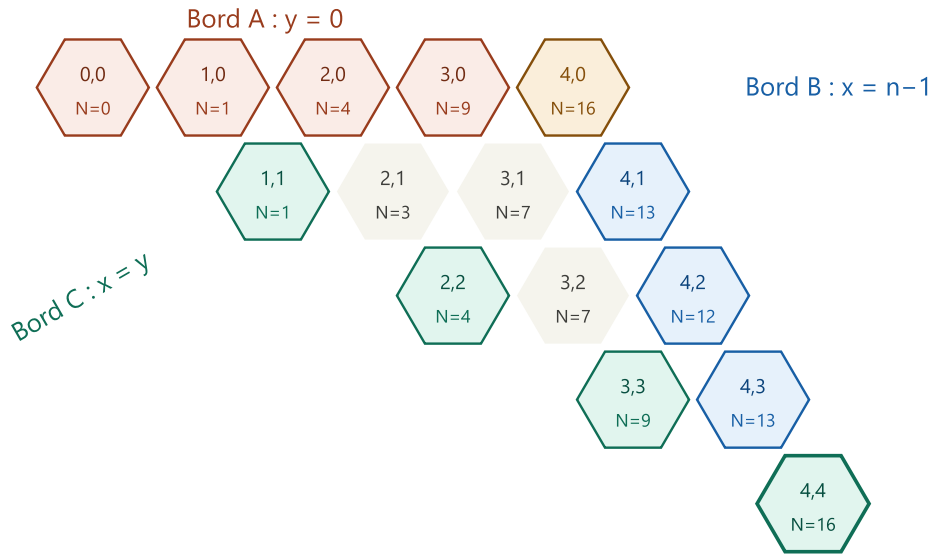
Dans $\mathbb{Z}[\omega]$, l'inégalité $x \geq y$ définit un **demi-plan** par rapport à l'axe de direction $\omega - 1$. Algébriquement, c'est la condition :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z}{\omega - 1}\right) \geq 0$$

puisque $\omega - 1 = e^{i\pi/3} \cdot \sqrt{3}$ oriente précisément la frontière $x = y$. Le plateau de Y est donc l'intersection de $\mathbb{Z}[\omega]$ avec ce demi-plan, tronquée à $0 \leq x, y \leq n-1$.

Plateau du jeu Y (n=5) — domaine fondamental de $\mathbb{Z}[\omega]$

Cases vérifiant $0 \leq y \leq x \leq n-1$



Propriétés algébriques du domaine fondamental

- Bord A ($y=0$) : $\text{Im}(z) = 0$, entiers rationnels, axe réel de $\mathbb{Z}[\omega]$
- Bord B ($x=n-1$) : $z \equiv n-1 \pmod{\omega-1}$, bord "conjugué"
- Bord C ($x=y$) : $z = x(1+\omega) = -x\omega^2$, multiples de $-\omega^2$ (irréductible de norme 1)

Coin $(0,0) \in A \cap C$ · Coin $(n-1, 0) \in A \cap B$ · Coin $(n-1, n-1) \in B \cap C$

Norme sur la diagonale C : $N(x+x\omega) = x^2 - x^2 + x^2 = x^2 \rightarrow \text{distance} = x$

Le domaine $\{x \geq y\}$ est le secteur angulaire $\arg(z) \in [-\pi/3, 0]$ dans $\mathbb{Z}[\omega]$

0.7 Les trois bords et leur nature algébrique

Le jeu Y se gagne en touchant les **trois bords simultanément**. Dans $\mathbb{Z}[\omega]$, ces trois bords ont des natures algébriques très différentes :

Bord A ($y = 0$) : ce sont les entiers rationnels de $\mathbb{Z}[\omega]$, autrement dit $\mathbb{Z} \cap \text{domaine}$. La partie imaginaire est nulle : $\text{Im}(\mathbb{Z}) = y \cdot \text{Im}(\omega) = 0$. C'est l'axe réel du réseau.

Bord C ($x = y$) : les cases de la forme $x + x\omega = x(1 + \omega)$. Or $1 + \omega = -\omega^2$ (puisque $1 + \omega + \omega^2 = 0$), donc toutes ces cases sont des **multiples de $-\omega^2$** , qui est une unité. La diagonale est l'orbite de l'origine sous la direction $-\omega^2$.

Bord B ($x = n-1$) : moins "pur" algébriquement, c'est la translation de l'origine par $(n-1)$, le bord "opposé" à l'axe réel dans le domaine tronqué.

0.8 Ce qui change par rapport à Hex : la condition de victoire triple

À Hex, relier deux bords opposés est une condition **linéaire** : progresser dans une direction. À Y, toucher trois bords est une condition **non linéaire** — un chemin gagnant doit "tourner" suffisamment pour atteindre des bords dans trois directions distinctes.

Cela a une traduction directe dans $\mathbb{Z}[\omega]$:

Un chemin gagnant à Y doit avoir un "virage" d'au moins 60° au sens des unités. Formellement, si le chemin est la suite $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k)$ des différences unitaires, il faut que la suite ne soit pas contenue dans un demi-espace de directions : il doit exister des δ_i et δ_j tels que $\arg(\delta_j/\delta_i) \geq \pi/3$, c'est-à-dire que le rapport δ_j/δ_i ne soit pas une puissance de ω dans $\{1, \omega, \omega^2\}$ pris dans un seul secteur de 180° .

0.9 Tactiques spécifiques à Y via $\mathbb{Z}[\omega]$

0.9.1 1. Le centre de masse des bords comme cible

Les trois coins du triangle Y sont $(0,0)$, $(n-1, 0)$ et $(n-1, n-1)$. Leur **barycentre** dans $\mathbb{Z}[\omega]$ est :

$$c = \frac{1}{3}(0 + (n-1) + (n-1)(1+\omega)) = \frac{(n-1)(2+\omega)}{3}$$

Pour $n \equiv 1 \pmod{3}$, ce barycentre est un entier d'Eisenstein. C'est le **point équidistant des trois bords** au sens de la norme d'Eisenstein — la case naturellement centrale à occuper en premier.

0.9.2 2. La norme trichrome

Définissons trois "normes directionnelles" pour mesurer la progression vers chaque bord :

- $dA(z) = y$ (distance au bord A : il suffit de diminuer y)
- $dC(z) = x - y$ (distance au bord C : la "largeur" dans le secteur)
- $dB(z) = (n-1) - x$ (distance au bord B)

Ces trois quantités sont toutes des **formes linéaires** sur $\mathbb{Z}[\omega]$, et leur somme est $dA + dC + dB = (n-1)$ — constante ! C'est une contrainte de conservation : **progresser vers un bord éloigne mécaniquement des deux autres**, dans une mesure contrôlée par la géométrie triangulaire.

La tactique : à chaque coup, choisir la case qui **minimise le maximum** de (dA, dC, dB) — le critère minimax sur les trois distances de bord. Cette heuristique est exactement adaptée à la forme du plateau triangulaire.

0.9.3 3. La symétrie d'ordre 3 et le vol de stratégie

Le plateau de Y a une **symétrie d'ordre 3** absente de Hex : la rotation de 120° qui permute cycliquement les trois bords. Dans $\mathbb{Z}[\omega]$, cette rotation est la multiplication par ω — mais elle ne préserve pas le domaine $x \geq y$ en général. En revanche, elle préserve la structure des trois bords. Cela implique que la stratégie de vol reste valable, et plus encore : le premier joueur peut adopter une **stratégie rotationnellement équilibrée**, en répondant au coup z de l'adversaire par ωz (rotation 120°) tant que ce coup est disponible. Cela maintient à chaque instant une position équilibrée par rapport aux trois bords.

0.9.4 4. Les irréductibles de norme 3 comme cols critiques

Dans $\mathbb{Z}[\omega]$, les éléments de norme 3 sont les associés de $(1 - \omega)$: ce sont les **premiers de Eisenstein au-dessus de 3**. Sur le plateau de Y, les cases dont la norme $N(z)$ est divisible par 3 forment un sous-réseau triangulaire — précisément les cases de la forme $k(1 - \omega)$.

Ces cases sont des **cols** : tout chemin reliant deux secteurs angulaires différents du domaine doit passer "près" d'un tel col. Les identifier est crucial, car bloquer un adversaire en occupant les cols d'un secteur le force à un long détour.

0.9.5 5. La réduction Hex \rightarrow Y et la tactique duale

La réduction classique de Hex en Y (Milnor) identifie chaque partie de Hex à une partie de Y via un repliement du carré en triangle. Dans $\mathbb{Z}[\omega]$, ce repliement est l'application :

$$\phi(x + y\omega) = \begin{cases} x + y\omega & \text{si } x \geq y \\ y + x\omega & \text{sinon} \end{cases}$$

C'est précisément la **réflexion par rapport à la droite $x = y$** , qui dans $\mathbb{Z}[\omega]$ est la conjugaison $z \mapsto \bar{z}$ suivie d'une mise à l'échelle. Toute tactique de Hex se transpose donc à Y via cette application, mais Y admet **en plus** des tactiques propres exploitant la symétrie d'ordre 3.

0.10 Synthèse

Propriété	Hex	Y
Symétrie du plateau	Ordre 2 ($z \mapsto -z$)	Ordre 3 ($z \mapsto \omega z$)
Condition de victoire	Linéaire (1 direction)	Non-linéaire (3 bords)
Heuristique naturelle	Norme vers un bord	Minimax des 3 distances de bord
Cols critiques	Multiples de $(1-\omega)$ sur l'axe	Sous-réseau triangulaire de norme 3
Bord algébriquement "pur"	Les deux bords opposés	Bord A (axe réel) et Bord C (multiples de ω^2)

Y est, à bien des égards, le jeu **plus naturel** pour $\mathbb{Z}[\omega]$: sa symétrie d'ordre 3 correspond exactement à l'action du groupe des unités

$$\{1, \omega, \omega^2\}$$

sur le réseau, là où Hex n'exploite que la sous-symétrie d'ordre 2. Le domaine fondamental $x \geq y$ est précisément le **secteur fondamental** de cette action de groupe — le quotient $\mathbb{Z}[\omega] / \langle \omega \rangle$ dans un sens géométrique.

Le dessin ne donne pas le plateau de Y, parce que $w = \exp(2i\pi/3)$, pas $\exp(i\pi/3)$.

Vous avez tout à fait raison ! J'ai utilisé la mauvaise valeur de ω .

Avec $\omega = \exp(2i\pi/3)$, on a :

$$\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

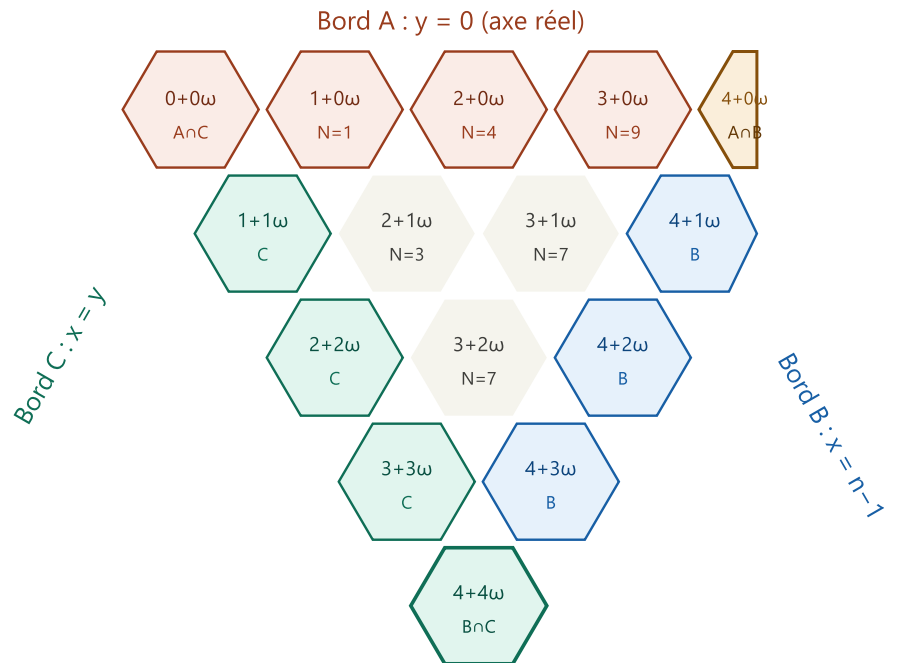
Donc un entier d'Eisenstein $x + y\omega$ a pour coordonnées cartésiennes :

$$\operatorname{Re}(x + y\omega) = x - \frac{y}{2}, \quad \operatorname{Im}(x + y\omega) = y\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Le décalage horizontal d'une rangée y est de $-y/2$ (vers la gauche), pas $+y/2$ vers la droite comme je l'avais dessiné. La grille est cisailée dans l'autre sens, et la diagonale $x = y$ pointe dans une direction différente. Recalculons les positions pixel :

$$p_x = x_0 + x \cdot s - y \cdot \frac{s}{2}, \quad p_y = y_0 + y \cdot \frac{s\sqrt{3}}{2}$$

avec s le pas de la grille. Le plateau de Y ($x \geq y$) forme alors un **vrai triangle équilatéral**, ce qui est la forme canonique du jeu.



Structure algébrique — $\omega = \exp(2i\pi/3)$

■ Bord A ($y=0$) : entiers rationnels $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[\omega]$ — $\operatorname{Im}(z) = 0$

■ Bord B ($x=n-1$) : $z = (n-1) + y\omega$, translation de l'origine

■ Bord C ($x=y$) : $z = x(1+\omega) = -x\omega^2$, multiples de l'unité $-\omega^2$

$$\operatorname{Re}(x+y\omega) = x - y/2 \cdot \operatorname{Im}(x+y\omega) = y\sqrt{3}/2 \cdot N(x+y\omega) = x^2 - xy + y^2$$

$$\text{Coin AnC} = (0,0) \cdot \text{Coin AnB} = (n-1, 0) \cdot \text{Coin BnC} = (n-1, n-1)$$

Le domaine $\{x \geq y \geq 0\}$ est le secteur $\arg(z) \in [-\pi/3, 0]$ dans $\mathbb{Z}[\omega] \rightarrow$ triangle équilatéral ✓

Le triangle est maintenant correct. Les trois bords forment bien un triangle équilatéral, ce qui reflète la symétrie d'ordre 3 de $\mathbb{Z}[\omega]$: les rotations de 120° (multiplication par ω) permutent cycliquement les trois bords.

Quelques conséquences de la correction :

La diagonale C est maintenant l'axe de $-\omega^2$, non pas de $+\omega^2$. Puisque $1 + \omega = -\omega^2$ (relation fondamentale de $\mathbb{Z}[\omega]$), les cases $x + x\omega = x(1+\omega) = -x\omega^2$ sont bien des multiples d'une unité, et la direction C pointe à 60° vers le bas-gauche dans le plan complexe — cohérent avec $\omega = \exp(2i\pi/3)$.

La norme sur la diagonale C : $N(x + x\omega) = x^2 - xx + x^2 = x^2$, donc la distance hexagonale entre $(0,0)$ et (x,x) est exactement x . La diagonale est une géodésique, comme le bord A.

Le bord B ($x = n-1$) est le seul des trois qui ne soit pas un sous-groupe ou un idéal de $\mathbb{Z}[\omega]$ — il est algébriquement moins "pur", ce qui explique pourquoi les tactiques d'Eisenstein sont plus naturelles depuis les bords A et C.