

DEVOIR MAISON n° 7
Correction France 2005



La fonction f est définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = (20x + 10)e^{-\frac{1}{2}x}.$$

```
f(x) := (20x+10)*exp(-1/2*x);
```

On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 1 cm).

1. Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.

Une étude directe de la limite fait apparaître une forme indéterminée. Pour la lever, on développe l'expression de $f(x)$.

```
developper(f(x));
```

$$20 \cdot x \cdot e^{-\frac{x}{2}} + 10 \cdot e^{-\frac{x}{2}}$$

On devra ensuite utiliser les limites du cours

$$\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X = 0$$

pour prouver par somme des limites, que

```
limite(f(x), x, +infinity);
```

$$0$$

2. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.

On calcule $f'(x)$ en utilisant la dérivée d'un produit.

```
g:=deriver(f(x));
```

$$20 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{(20 \cdot x + 10) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}}{-2}$$

On factorise $f'(x)$

```
factoriser(g);
```

$$(- (5 \cdot (2 \cdot x - 3))) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$$

On résout $f'(x) = 0$

```
resoudre(g=0, x);
```

$$\left[\frac{3}{2} \right]$$

On détermine le signe de $f'(x)$

```

----- xcas -----
resoudre(g>0,x);
-----
[x < (3/2)]
    
```

On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$f(0)$	$f(\frac{3}{2})$	0

avec

```

----- xcas -----
f(0);
-----
10
    
```

```

----- xcas -----
f(3/2);
-----
40 * e^(-3/4)
    
```

3. Établir que l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution strictement positive α dans l'intervalle $]0; +\infty[$. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de α .

On a

```

----- xcas -----
approx(f(3/2));
-----
18.894662
    
```

d'où le tableau suivant montrant l'existence et l'unicité de la solution sur $]0; +\infty[$:

x	0	$\frac{3}{2}$	α	$+\infty$
$f(x)$	10	$f(\frac{3}{2}) \approx 18.9$	10	0

```

----- xcas -----
fsolve(f(x)=10,x,4.5);
-----
4.673326
    
```

4. Tracer la courbe \mathcal{C} .

Geogebra – protocole de construction

Nom	Définition	Commande	Algèbre
Fonction f		$f(x)=(20*x+10)*\exp(-.5*x)$	
Fonction g	$g(x)=f'(x)$	$f'(x)$	
Droite a		$y=10$	$a :y=10$
Point A	point d'inter. de f,a		$A=(4.6733,10)$

