

## Pythagorea - Le retour d'un support exercice trop souvent non utilisé : Le papier quadrillé (et la règle non graduée)

On résout les problèmes proposés en traçant seulement *des segments et les intersections de ces segments avec les objets présents ou déjà construits*. La solution est validée par un surlignage jaune.

Voici par exemple l'exercice 25.16 : il s'agit de tracer, à la règle non graduée donc, les tangentes au cercle issues de A. C'est un exercice accessible en fin de 3<sup>e</sup> ou en 2<sup>e</sup>, avec la propriété de Pythagore et les équations de droites.

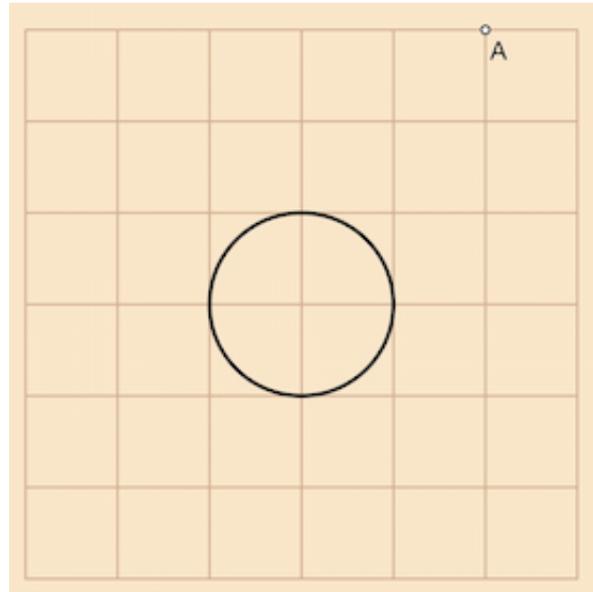
En notant O le centre du cercle et M(x,y) un point du cercle solution du contact.

On a  $OA^2 = 13$  et  $OM=1$  et donc  $AM^2=12$ .

Par Pythagore :

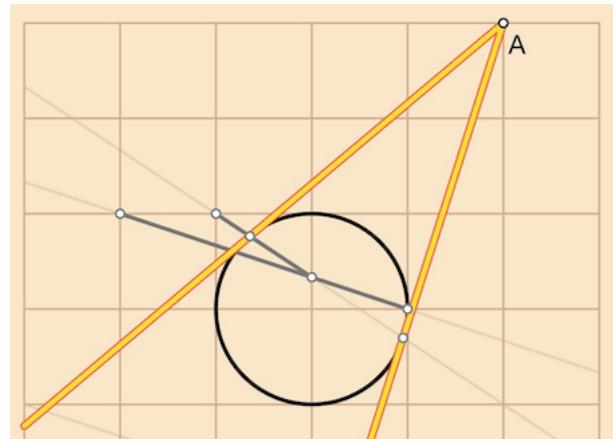
$$AM^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2 = 12.$$

Avec  $x^2 + y^2 = 1$ , on aboutit à  $y = \frac{-2x+1}{3}$ .



Il s'agit alors de tracer cette droite avec les outils disponibles (règle non graduée et quadrillage). Les solutions sont l'intersection de cette droite avec le cercle.

On peut le faire par exemple comme ci-contre, et cette mise en œuvre est aussi en soi une phase de l'exercice.



Autre exemple

L'exercice 16.16 demande de construire la bissectrice de l'angle tracé.

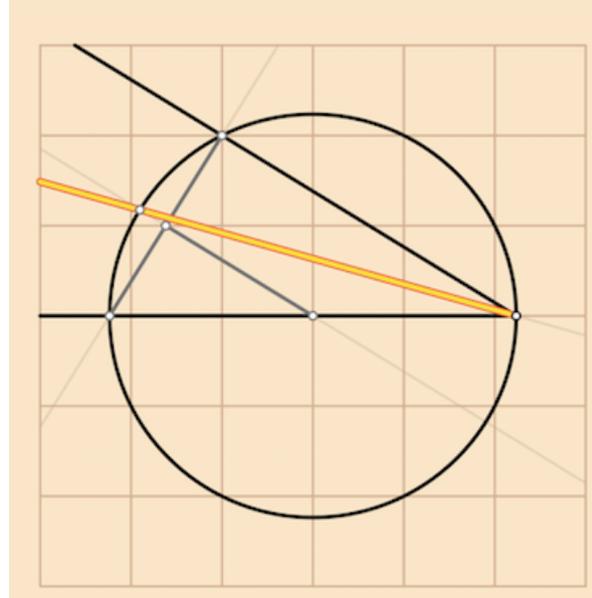
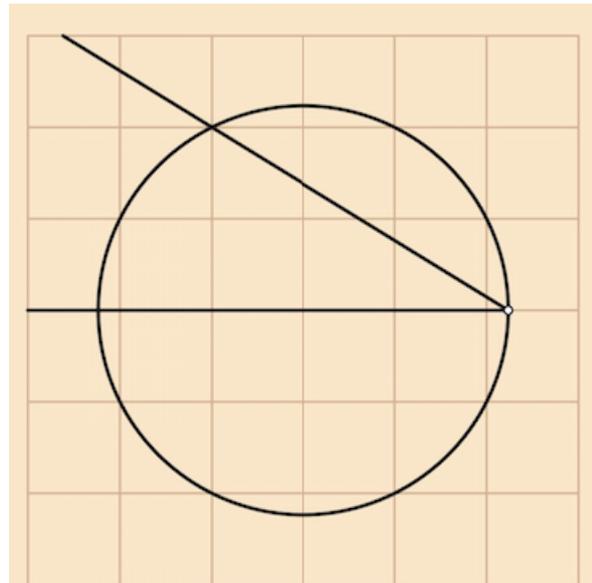
Le cercle est de rayon  $\sqrt{5}$ .

Une solution simple (merci Aymeric) consiste à utiliser le théorème de l'angle inscrit.

Il faut noter que l'exercice est facile, ici, car la bissectrice de l'angle au centre est très simple à construire car le point du cercle est d'ordonnée 2 et donc par le théorème du milieu – et le quadrillage, la construction est immédiate.

En traçant la médiatrice comme médiane du triangle isocèle, avec un segment, la droite se prolonge et on peut donc prendre l'intersection avec le cercle et terminer la construction.

Bien entendu plusieurs exercices sont construits sur des démarches similaires avec une difficulté croissante pour la construction de l'objet recherché.



On découvre beaucoup de propriétés élémentaires utilisant le quadrillage – dans les exercices souvent abordables par les élèves – mais aussi des relations sur les angles, des calculs surprenants de racines carrées que l'on n'imagine pas car on ne pratique pas assez le papier quadrillé. Les derniers exercices de chaque thème souvent ne sont pas simples.

L'application est gratuite et sans publicité. Quand on a fini 15 thèmes complets, on est invité à éventuellement la payer en remerciement aux auteurs, moins de 1 €, sans qu'il y ait obligation, on peut continuer à « jouer ».

### **Pythagorea60 (plutôt pour les enseignants)**

Il existe une autre application, basée sur un quadrillage de triangles équilatéraux. Si les premières activités sont toujours très simples, nos réflexes de l'orthogonalité doivent s'adapter. Dans la présentation de l'application, on montre ostensiblement que la grande diagonale des losanges formés de deux triangles équilatéraux mesure  $\sqrt{3}$ . C'est une donnée de base à utiliser constamment.

Rapidement on est amené à faire des premiers calculs comme par exemple :  $AB^2 = AM^2 + MB^2 = 3 + 4 = 7$ .  
Et donc  $AB = \sqrt{7}$ .

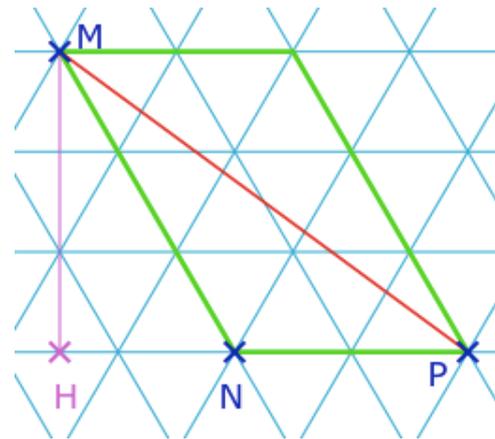
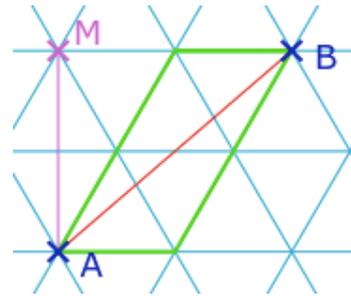
Mais cela ne reste pas aussi simple très longtemps.

Par exemple dans la configuration suivante :

$$MP^2 = MH^2 + HP^2 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{27}{4} + \frac{49}{4} = 19$$

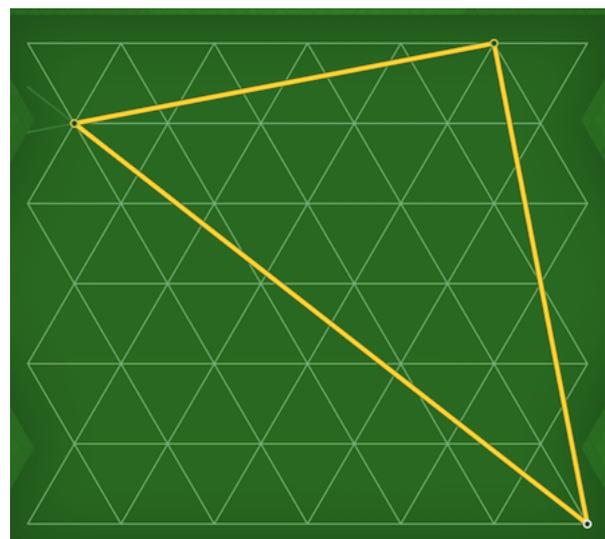
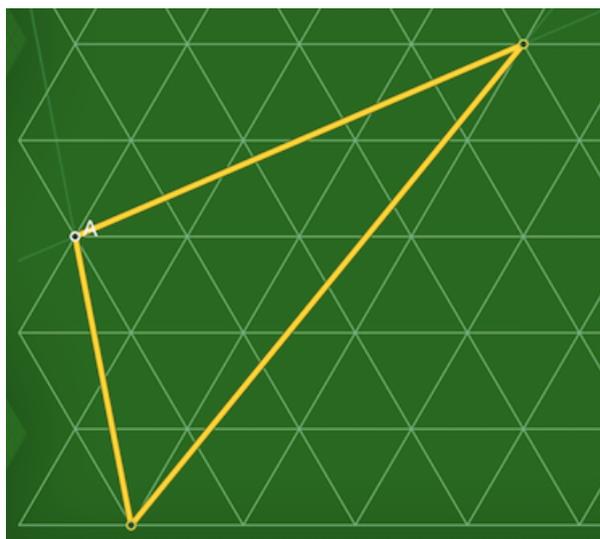
L'enseignant peut aller plus vite, en utilisant la relation d'Al-Kashi  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(A)$ . Ici l'angle, en N est de  $120^\circ$  - et on peut toujours se placer dans cette situation. Dans ce cas, l'égalité précédente se simplifie en  $a^2 = b^2 + c^2 + bc$ .  
On peut alors écrire :

$$MP^2 = MN^2 + NP^2 + MN \times NP = 3^2 + 2^2 + 2 \times 3 = 19$$



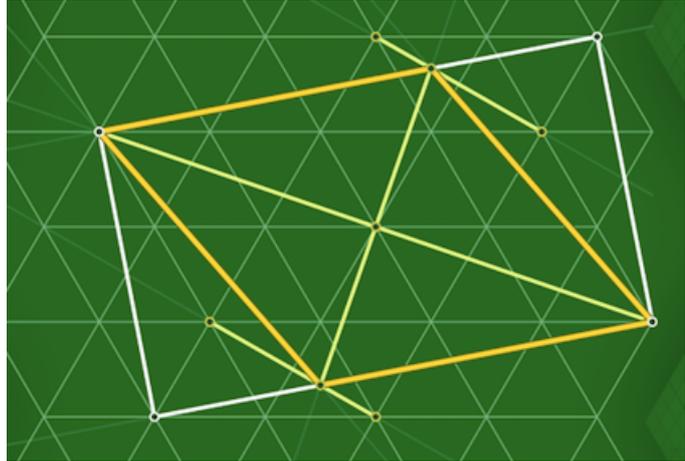
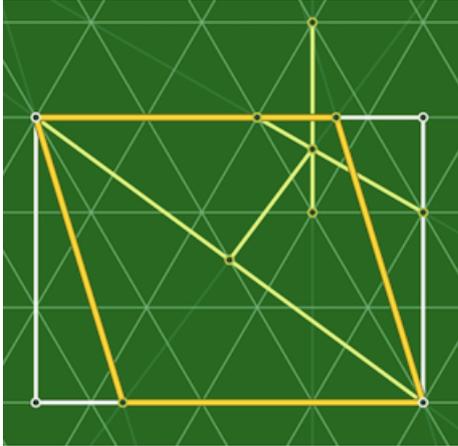
Cette application est donc moins pour les élèves, en tout cas pas pour le collègue.  
Quelques exemples :

L'exercice 14.7 demande de construire un triangle de sommet A et dont les deux autres sommets sont des noeuds du quadrillage, tel que l'angle obtus soit en A et de longueurs  $\sqrt{7}, \sqrt{19}$ , et  $\sqrt{31}$ . L'exercice suivant, toujours sur les noeuds du quadrillage, avec pour longueurs, 7,  $2\sqrt{7}$  et  $\sqrt{21}$ . Chacun remarquera (Al-Kashi) que  $49 = 5^2 + 3^2 + 3 \times 5$ .



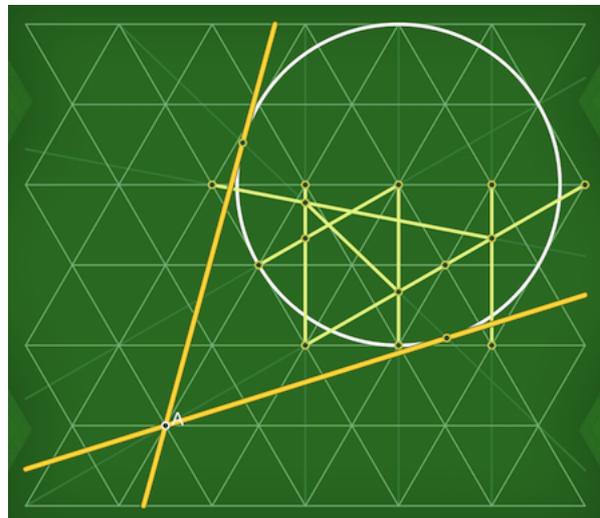
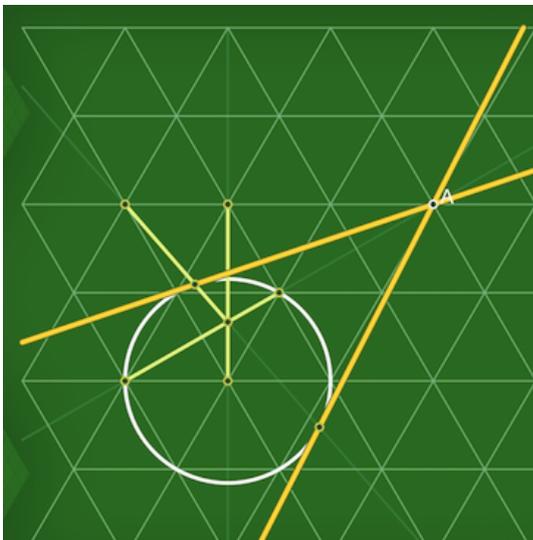
Le thème sur les losanges est l'occasion de travailler notre perception de l'orthogonalité avec ce type de quadrillage.

Les exercices 21.19 et 21.20 demandent d'inscrire un losange dans le rectangle tel qu'il partage une diagonale avec le rectangle



Le thème des tangentes aux cercles est lui aussi plus technique que dans le Pythagorea avec le quadrillage orthogonal, même si la démarche est identique. Par exemple pour la figure de gauche (22.10), en calculant l'équation de la droite qui coupe le cercle en les deux points de contact, comme dans Pythagorea, on trouve  $y = \frac{-2x+1}{\sqrt{3}}$ .

Chacun s'amusera à trouver l'équation pour le 22.11 à droite.



Cette application est parfois un vrai défi, y compris pour l'enseignant.

Là encore dès que l'on a complété 15 thèmes (certains ont 25 exercices) on est invité à acheter l'application (1 ou 2 € au choix) qui est gratuite et sans publicité.

Bravo aux auteurs ... qui ont plusieurs autres applications dont une sur les sections de polyèdres, toujours sous Android ou iOS, téléphone ou tablette.