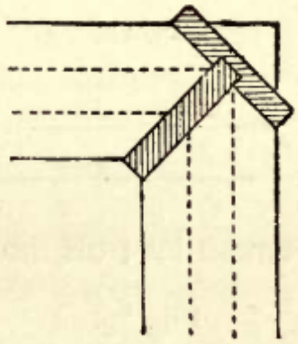
driers dont la longueur est précisément égale à la largeur du fossé.

Fig. 57.

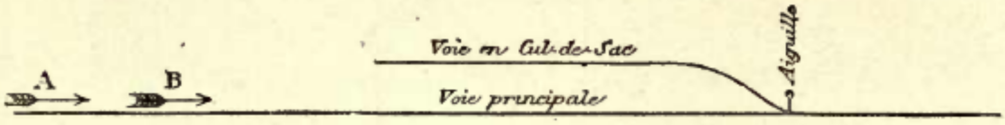


La *fig.* 57 représente un coin du champ, avec la disposition des deux madriers. Quant à la démonstration mathématique, elle résulte de l'inégalité suivante, que le double de la diagonale d'un carré est plus petit que le triple du côté. Cette devinette peut trouver son utilité en temps de guerre; nous avons déjà donné un autre exemple, dans notre premier volume, pour la traversée d'un régiment; nous donnerons encore les deux exemples suivants qui nous ont été communiqués par M. A. Cuny, inspecteur principal de l'exploitation des chemins de fer de l'État, à Nantes.

MANŒUVRES DE GARE.

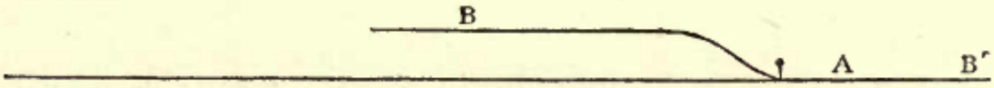
PROBLÈME I. — *Garage d'un train* B *dans une station ne comportant, indépendamment de la voie principale, qu'une voie en* *cul-de-sac insuffisante pour contenir entièrement le train* B, *que doit cependant dépasser le train* A *marchant dans le même sens mais avec une vitesse plus grande que celle du train* B (*fig.* 58).

Fig. 58.



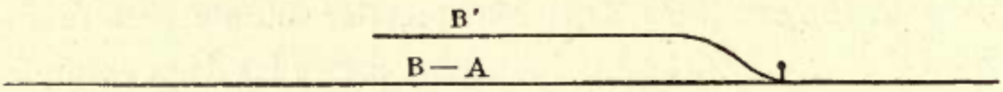
On exécute successivement les trois mouvements suivants :

Fig. 59.



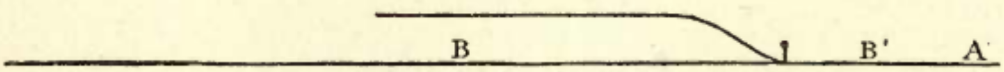
1° Garer sur le cul-de-sac une partie seulement du train B; l'autre partie restant en B', le train A pourra par suite se placer entre l'aiguille et la partie du train B' (*fig.* 59).

Fig. 60.



2° Le train A prend ensuite la partie du train B garée sur le cul-de-sac pour la placer sur la voie principale; la partie du train B' comprenant la machine pourra par suite prendre la place de B sur le cul-de-sac devenu libre (*fig.* 60).

Fig. 61.

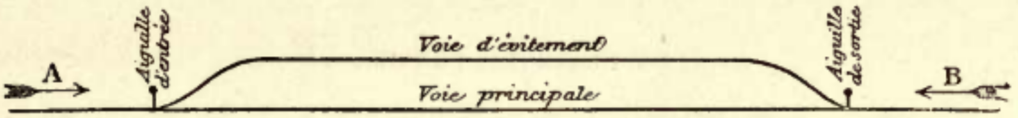


3° Le deuxième mouvement terminé, rien ne s'oppose plus à l'expédition du train A et à la formation du train B, en joignant B' à B (*fig.* 61).

Remarque. — Les divers mouvements indiqués ci-dessus exigeant une perte de temps relativement longue, il est plus pratique d'expédier le premier train B à la station voisine munie des voies nécessaires pour le garer entièrement, et de retenir le train A pendant quelques minutes afin de maintenir un intervalle suffisant pour éviter une collision; mais cette remarque ne s'applique pas au second problème.

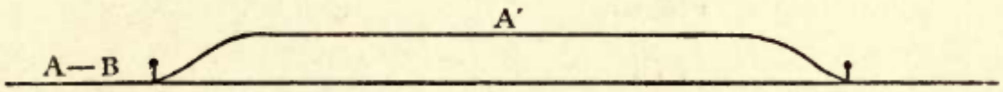
Problème II. — *Croisement de deux trains, marchant en sens contraires, dans une station ne comportant qu'une voie d'évitement trop courte pour contenir les trains considérés* (*fig.* 62).

Fig. 62.



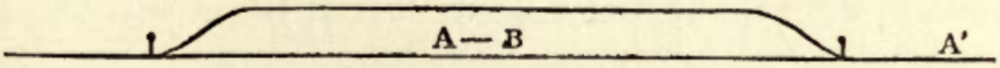
On résout ce problème par trois mouvements successifs :

Fig. 63.



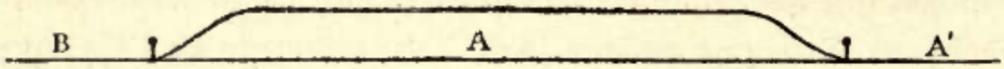
1° Garer une première partie du train A remorquée par la machine sur la voie d'évitement, le train B pourra par suite franchir la station de façon à dégager l'aiguille de sortie, et permettre à la partie A' de dégager la voie d'évitement (*fig.* 63).

Fig. 64.



2° Ramener la partie A en refoulant B sur la voie principale, cette partie A sera abandonnée jusqu'à ce que le train B, continuant son mouvement de recul, puisse s'engager sur la voie d'évitement par l'aiguille de sortie et que, reprenant sa marche en avant, il franchisse de nouveau la station en sortant par l'aiguille d'entrée (*fig.* 64).

Fig. 65.



3° Dès le départ du train B, reformer le train A en joignant les deux parties A'et A (*fig.* 65).

LA CROIX DE PERLES.

Une vieille marquise donne une croix de perles à son joaillier pour la réparer; elle lui fait remarquer qu'elle connaît le

Fig. 66.

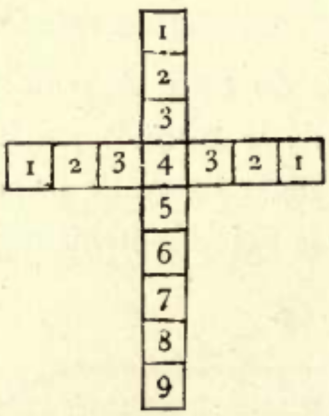
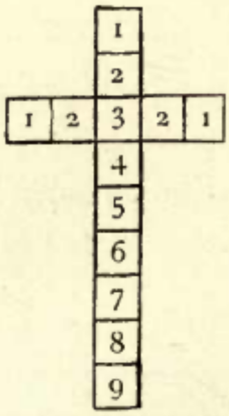


Fig. 67.



nombre des perles, car, en les comptant à partir de l'une des trois extrémités supérieures jusqu'au bas de la croix, elle en trouve toujours neuf; le joaillier retire deux perles et rend la *croix à la marquise qui trouve son compte. On demande ce que fit le joaillier?*

On voit facilement, par les *fig.* 66 et 67, que le joaillier a pris une perle à chacun des bras de la croix et a ensuite relevé ceux-ci d'un rang. Le joaillier aurait pu tout aussi bien baisser d'un rang les deux bras de la croix, en ajoutant une perle à chacun d'eux.

Il faut convenir que la vieille marquise était bien naïve, ainsi que l'abbesse du couvent dont il est parlé dans le problème suivant, du même genre. Aussi ne doit-on considérer ces énoncés que comme des exemples, les plus simples, de la résolution d'une équation du premier degré à deux inconnues, en nombres entiers et positifs.

LES RELIGIEUSES.

Des religieuses sont retirées en huit cellules tellement disposées, qu'il y en a quatre dans les quatre coins du dortoir bâti en carré, et chacune des quatre autres est au milieu de chaque côté. L'abbesse, qu'on suppose aveugle, fait sa visite. Elle compte le nombre des religieuses qui sont dans les trois cellules d'un rang; elle trouve que le nombre des religieuses d'un rang est partout égal à neuf, en prenant pour un rang deux cellules des coins et celle du milieu. Cette abbesse fait une seconde visite, et compte dans chaque rang le même nombre de personnes que dans la première visite, quoiqu'il y soit entré quatre nonnes. Enfin, dans la troisième visite, elle trouve encore neuf personnes *dans chaque rang, bien que les nonnes soient sorties avec quatre religieuses.*

Supposons d'abord qu'il y ait trois religieuses dans chaque cellule (*fig.* 68); l'abbesse en compte neuf à chaque rangée,

Fig. 68.

3	3	3
3		3
3	3	3

Fig. 69.

2	5	2
5		5
2	5	2

dans sa première visite, et le nombre des religieuses est vingt-quatre. Ensuite, si une religieuse sort de chaque cellule du coin pour entrer avec une nonne dans la cellule du milieu, en tournant dans le même sens (*fig.* 69), l'abbesse trouve encore neuf personnes dans chaque rangée à la deuxième visite, bien qu'il y ait maintenant vingt-huit personnes.

Enfin, si chacune des nonnes quitte le dortoir avec une reli-

Fig. 70.

4	1	4
1		1
4	1	4

Fig. 71.

1	7	1
7		7
1	7	1

gieuse et si les religieuses qui s'étaient déplacées retournent dans leur cellule avec une autre religieuse (*fig.* 70), l'abbesse comptera neuf personnes dans chaque rangée, bien qu'il ne reste plus au dortoir que vingt religieuses.

On peut exécuter aisément ce problème avec des jetons noirs pour les religieuses et blancs pour les nonnettes. On peut faire une nouvelle modification en supposant que chacune des religieuses qui est sortie avec une nonne en a ramené deux, le nombre des personnes devient trente-deux (*fig.* 71).

LE BON BOURGEOIS.

Nous donnerons encore l'énoncé suivant, que nous empruntons à la 4e édition des *Problèmes plaisants et délectables* (p. 189); ce problème ne diffère du précédent que par le nombre des jetons; mais les nonnettes sont remplacées par des bouteilles.

Un bon bourgeois fit faire dans sa cave un casier de neuf cases disposées en carré; la case du milieu était destinée à recevoir les bouteilles vides provenant de la consommation de soixante bouteilles pleines, qu'il disposa dans les huit autres cases en mettant six bouteilles dans chaque case des angles et neuf dans chacune des autres cases. Son domestique enleva d'abord quatre bouteilles qu'il vendit, et disposa les bouteilles restantes de manière qu'il y en eût toujours vingt et une sur chaque côté du carré. Le maître, trompé par cette disposition, pensa que son domestique n'avait fait qu'une transposition de bouteilles, et qu'il y en avait toujours le même nombre. Le domestique profita de la simplicité de son maître pour enlever de nouveau quatre bouteilles, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il ne fût plus possible d'en enlever quatre sans que le nombre vingt et un cessât de se trouver sur chaque côté *du carré. On demande comment il s'y prit à chaque fois et de combien de bouteilles il fit tort à son maître?*

En désignant par x le nombre des bouteilles de chaque coin et par y le nombre des bouteilles de chaque milieu, on doit avoir

$$2x + y = 21,$$

et le nombre des bouteilles dans la cave est égal à $42 + 2y$.

En supposant successivement pour y, qui doit être impair et au plus égal à 21, les valeurs 1, 3, 5, 7, ..., on peut obtenir les dispositions suivantes :

Dispositions.	NOMBRE DES BOUTEILLES		
	dans un coin.	dans un milieu.	dans la cave.
1	0	21	84
2	1	19	80
3	2	17	76
4	3	15	72
5	4	13	68
6	5	11	64
7	6	9	60
8	7	7	56
9	8	5	52
10	9	3	48
11	10	1	44

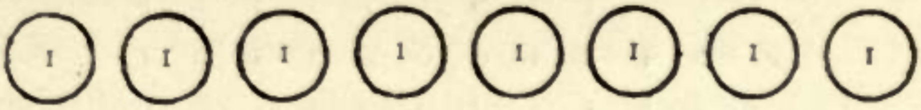
En commençant à la septième disposition, le valet a fait tort à son maître de 16 bouteilles.

LES HUIT JETONS.

Huit jetons sont disposés en ligne droite à la suite les uns des autres; on demande comment il faut déplacer quatre de ces jetons en les faisant sauter par-dessus deux autres pour les poser sur un troisième, de telle sorte qu'il reste quatre piles de deux jetons.

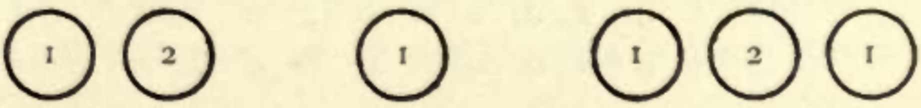
Supposons d'abord les pions dans la position de la *fig.* 72; on

Fig. 72.



place le cinquième pion, en comptant de gauche à droite, sur le second, puis le troisième sur le septième (*fig.* 73).

Fig. 73.



Il reste alors à poser les pions, qui se trouvaient d'abord le quatrième et le sixième, sur le premier et sur le dernier.

On peut varier ce problème en augmentant le nombre des jetons d'un nombre pair quelconque. En effet, si l'on pose d'abord le quatrième jeton de la série sur le premier, on peut supposer que l'on a diminué de deux unités le nombre des pions; on répétera la manœuvre jusqu'à ce que le nombre des pions se trouve abaissé à huit. Il faut avoir soin de ne pas continuer la même manœuvre pour huit pions, car on se trouverait amené à six jetons, et, dans ce cas, le problème est impossible.

Au lieu de sauter sur deux jetons, on peut sauter sur trois, en prenant d'abord une ligne de douze pions qu'il faut transformer en quatre piles contenant chacune trois pions. On commence d'abord par former deux piles sur le deuxième jeton à droite et sur le deuxième à gauche. Puis on forme les piles extrêmes en faisant passer successivement les autres pions par-dessus chacune des deux piles formées.

Voici les dispositions successives pour douze jetons; les chiffres 1, 2, 3, 0, indiquent le nombre des jetons sur chaque case :

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	2	1	1	1	0	0	1	1	1	2	1
1	3	1	1	1	0	0	0	1	1	2	1
1	3	1	0	1	0	0	0	1	1	3	1
2	3	0	0	1	0	0	0	1	1	3	1
3	3	0	0	0	0	0	0	1	1	3	1
3	3	0	0	0	0	0	0	1	0	3	2
3	3	0	0	0	0	0	0	0	0	3	3.

Si la ligne initiale contient 15, 18, 21,..... jetons, on commence par diminuer successivement de trois en formant une pile à l'une des extrémités, jusqu'à ce que la ligne ne renferme plus que douze jetons.

D'ailleurs cette méthode est générale, et permet de résoudre ce problème : *Étant donnés mp jetons en ligne droite, m n'étant pas plus petit que 4, former m piles de p jetons en passant par-dessus p jetons.* Cette généralisation a été indiquée par M. Delannoy.

LE JEU DES GRENOUILLES.

On place sur les cases d'une bande formée d'un nombre impair de carrés un nombre égal de pions blancs et noirs, séparés par une case vide; tous les pions blancs se trouvant à gauche, et les pions noirs à droite. Il s'agit de faire passer les pions blancs à la place des pions noirs, en profitant de la case vide.

On adopte les règles suivantes : Les pions peuvent avancer d'une case, en allant toujours de gauche à droite, pour les pions blancs; et en sens inverse, pour les pions noirs. Un pion peut franchir un pion d'une autre couleur, dans le sens de son mouvement exigé, pour venir se placer sur la case vide immédiatement voisine.

Si l'on suppose d'abord deux pions blancs ○, ○, et deux pions noirs ●, ●, séparés par une case vide que nous désignerons toujours par un point, on opérera d'après le tableau suivant; la

1	○	○	.	●	●	.
2	○	.	○	●	●	1
3	○	●	○	.	●	2
4	○	●	○	●	.	1
5	○	●	.	●	○	2
6	.	●	○	●	○	2
7	●	.	○	●	○	1
8	●	●	○	.	○	2
9	●	●	.	○	○	1

colonne numérique à gauche indique la suite des coups, la colonne numérique à droite distingue, par les chiffres 1 et 2, le *pas* ou avance d'une seule case, du *saut* ou avance de deux cases.

Le problème se trouve ainsi résolu en 9 positions; et l'on observe que la colonne de droite est symétrique, c'est-à-dire qu'elle donne les mêmes chiffres en la lisant de bas en haut ou de haut en bas; de plus, le rectangle qui indique les diverses positions est symétrique par rapport au centre.

Si l'on suppose trois pions blancs et trois pions noirs, on échange les deux systèmes, d'après les règles indiquées, conformément au tableau suivant sur lequel on peut encore faire les remarques qui précèdent.

1	○	○	○	.	●	●	●	.
2	○	○	.	○	●	●	●	1
3	○	○	●	○	.	●	●	2
4	○	○	●	○	●	.	●	1
5	○	○	●	.	●	○	●	2
6	○	.	●	○	●	○	●	2
7	.	○	●	○	●	○	●	1
8	●	○	.	○	●	○	●	2
9	●	○	●	○	.	○	●	2
10	●	○	●	○	●	○	.	2
11	●	○	●	○	●	.	○	1
12	●	○	●	.	●	○	○	2
13	●	.	●	○	●	○	○	2
14	●	●	.	○	●	○	○	1
15	●	●	●	○	.	○	○	2
16	●	●	●	.	○	○	○	1

Le nombre des positions est égal à 16, le nombre des pas à 6 et le nombre des sauts à 9. Pour le cas de quatre pions blancs et de quatre pions noirs, nous donnerons seulement la moitié du tableau des positions, l'autre moitié s'en déduit par symétrie.

1	○	○	○	○	.	●	●	●	●	.
2	○	○	○	.	○	●	●	●	●	1
3	○	○	○	●	○	.	●	●	●	2
4	○	○	○	●	○	●	.	●	●	1
5	○	○	○	●	.	●	○	●	●	2
6	○	○	.	●	○	●	○	●	●	2
7	○	.	○	●	○	●	○	●	●	1
8	○	●	○	.	○	●	○	●	●	2
9	○	●	○	●	○	.	○	●	●	2
10	○	●	○	●	○	●	○	.	●	2
11	○	●	○	●	○	●	○	●	.	1
12	○	●	○	●	○	●	.	●	○	2
13	○	●	○	●	.	●	○	○	○	2

Le nombre des positions est 25; le nombre des pas est égal à 8 et le nombre des sauts à 16. En général, le problème est toujours possible, et si l'on suppose p pions blancs et p pions noirs,

le nombre total des positions est $(p+1)^2$;

le nombre des pas est $2p$;

le nombre des sauts est p^2.

En ajoutant le nombre des pas au double du nombre des sauts on trouve $2p(p+1)$; c'est ce que l'on doit obtenir si l'on remarque que, pour occuper la case assignée, chaque pion doit avancer de $p+1$ cases, et par suite les $2p$ pions doivent exécuter $2p(p+1)$ déplacements d'une case.

QUADRILLE DES GRENOUILLES.

On peut encore se proposer le problème suivant : *On couvre les cases d'un damier de* 25 *ou de* 49 *cases d'un nombre égal de pions blancs et de pions noirs, en laissant vide la case du milieu; les pions sont symétriquement disposés par rapport au*

Fig. 74.

●	●	●	●	○	○	○
●	●	●	●	○	○	○
●	●	●	●	○	○	○
●	●	●		○	○	○
●	●	●	○	○	○	○
●	●	●	○	○	○	○
●	●	●	○	○	○	○

centre de l'échiquier. On demande d'échanger les positions des pions noirs et des pions blancs.

On admet les règles du problème précédent et on les adopte encore pour la colonne verticale du milieu (*fig.* 74).

Pour résoudre ce problème, on commence l'échange des pions de la ligne horizontale moyenne; on peut ensuite appliquer le même procédé à la colonne moyenne; mais, si l'on remarque, d'après les tableaux précédents, que chaque case de cette colonne est vide au moins une fois, pendant l'échange, on profitera de ce résultat pour échanger successivement les pions des autres lignes horizontales. Par suite, le nombre de toutes les positions est égal