Loi de Xenakis

I/ Probabilités et intégrales

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Xenakis[1] sur $[0;1]$ si la probabilité que X soit compris entre a et b est égale à

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b (2-2x)\mathrm{d}x$$

(a et b sont supposés compris entre 0 et 1, avec $a \leqslant b$)

1°) Calculer une primitive F de $2-2x$.

2°) On suppose que X suit une loi de Xenakis sur $[0;1]$; calculer les probabilités suivantes à l'aide d'intégrales (on pourra s'aider de la question précédente) :

- a) $P(0 \leqslant X \leqslant 0,5)$
- b) $P(0,25 \leqslant X \leqslant 0,75)$
- c) $P(0,6 \leqslant X \leqslant 1)$

3°)
- a) Représenter graphiquement la fonction $x \mapsto 2-2x$ sur $[0;1]$ (unités : 10 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées).
- b) Colorier en bleu sur le graphique précédent, la région correspondant à la probabilité que $0,25 \leqslant X \leqslant 0,75$

4°) Vérifier par un calcul d'intégrale, que P est bien une loi de probabilité, c'est-à-dire que

$$\int_0^1 (2-2x)\mathrm{d}x = 1$$

II/ Espérance

On admet que l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi continue (comme la loi de Xenakis) est l'intégrale du produit de la densité par x.

1°) Développer le produit $x(2-2x)$

2°) En déduire une primitive de $x(2-2x)$ sur $[0;1]$

3°) En déduire $EX = \displaystyle\int_0^1 x(2-2x)\mathrm{d}x$ (la valeur exacte est demandée, sous forme d'une fraction irréductible).

4°) On admet que la médiane d'une variable aléatoire X de Xenakis est égale à l'antécédent positif de $\dfrac{1}{2}$ par la fonction F vue dans la première partie.

- a) Résoudre l'équation $-x^2+2x-\dfrac{1}{2}=0$ sur $[0;1]$
- b) En déduire la valeur exacte de la médiane de X où X suit la loi de Xenakis. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près.
- c) Comparer l'espérance et la médiane de X.

1. d'après Iannis Xenakis, qui s'en est servi pour les premiers algorithmes de musique sur ordinateur

III/ Variance

On rappelle que pour une variable aléatoire X, la variance de X est la différence entre l'espérance de X^2 et le carré de l'espérance de X [2]. On admet que ce résultat reste vrai pour une variable aléatoire de Xenakis. On admet aussi que l'espérance de X^2 est l'intégrale de $x^2(2-2x)$ sur $[0;1]$

1°) Développer $x^2(2-2x)$

2°) En déduire $E(X^2)=\int_0^1 x^2(2-2x)\mathrm{d}x$

3°) En déduire la variance de X, soit $\int_0^1 x^2(2-2x)\mathrm{d}x-\left(\int_0^1 x(2-2x)\mathrm{d}x\right)^2$; on donnera le résultat sous forme de fraction irréductible et on pourra utiliser les résultats du (II).

4°) En déduire que l'écart-type de X est égal à $\frac{\sqrt{2}}{6}$ (on rappelle que l'écart-type d'une variable aléatoire est la racine carrée de sa variance [3]).

5°) Donner une valeur approchée de l'écart-type de X à 10^{-3} près.

IV/ Simulation

Pour simuler (sur ordinateur ou calculatrice) une variable aléatoire de Xenakis sur $[0;1]$, on peut prendre le minimum de deux variables aléatoires uniformes [4] sur $[0;1]$. On peut vérifier cela en construisant un histogramme de ce minimum. Voici la version Ti-82 Stat fr, utilisant une liste :

```
suite(min(NbrAléat(2)),N,1,200,1)→L1
```

puis mettre -0,1 dans Xmin et 1,1 dans Xmax avec Xgrad=0,1, puis -0,1 dans Ymin et 50 dans Ymax avec Ygrad=10

Ensuite, dans l'affichage statistique (2nde GraphStat), activer le `Graph1` (en le mettant sur "On"), puis choisir l'option `histogramme`, et la liste L1 comme ListeX (en laissant ListeY à 1). Enfin, `Graph` permet de voir l'histogramme.

Et la version CaRMetal, en JavaScript :

```
var t=[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0];
for (var n=0;n<=1000;n++){
var x = Math.min(Math.random(),Math.random());
t[Math.floor(10*x)]++;
}
Println(t);
for(var n = 0; n<=10; n++){
Point("Nom"+n,n,t[n]);
}
```

(en remplaçant "Nom" par le nom de l'élève, entre guillemets mais sans espace ni accent). Lancer ce script après connexion sur le réseau, pour permettre au poste serveur mutualiser les résultats.

2. On note cela $VX=E(X^2)-(EX)^2$
3. On note cela $\sigma X=\sqrt{VX}$
4. notées en général `random()` ou `alea()` sur les outils habituels