Vidéos et démarche d'investigation

Jean-Jacques Dahan
IREM de Toulouse

« Science sans conscience n'est que ruine de l'âme »
François Rabelais

1. Introduction

1.1. De l'apparition des technologies à la démarche d'investigation

Avant que les premières calculatrices (au milieu des années 70) ne renvoient les tables de logarithmes aux oubliettes, des exercices étaient proposés au baccalauréat qui nécessitaient la maîtrise et l'utilisation de ces tables (Bouvard et Ratinet). Il n'a pas fallu plus de deux ans pour que de tels exercices disparaissent des pratiques de classe et de l'examen. Les tables numériques de Laborde comme les règles à calculs furent des outils indispensables pour l'épreuve de calcul numérique des concours d'entrée aux grandes écoles. Là aussi, les performances croissantes et les prix décroissants des calculatrices ont fait disparaître de telles épreuves. Le remplacement d'outils calculatoires sur support papier par les nouveaux outils informatiques, d'abord les simples calculatrices, puis les calculatrices programmables, puis les calculatrices graphiques a perturbé pendant longtemps les enseignants de mathématiques qui avaient l'impression de perdre du temps d'enseignement en initiant leurs élèves, ne serait-ce qu'à la programmation des valeurs d'une fonction. Je ne parle pas des critiques abondantes faites à ceux qui utilisaient en classe des calculatrices pour traiter des données afin d'essayer d'en induire des conjectures ; combien de fois n'a-t-on pas été apostrophé par des : « Vous ne faites pas des mathématiques !». Il est curieux que le remplacement d'une technologie par une autre n'ait pas généré de nouvelles pratiques et de nouveaux problèmes. La loi de Moore qui illustre l'accélération de la puissance des technologies informatiques est peut-être la raison de cet effroi devant ces outils et un repli de beaucoup sur les mathématiques pures et dures.

Il n'est pas question ici de faire un historique des développements technologiques à disposition des mathématiciens et des enseignants de mathématiques depuis lors. Revenons en 2013 où les pratiques incluant l'utilisation des technologies sont fortement recommandées. La démarche d'investigation est recommandée tous azimuts dans les programmes de collège et de lycée. Cette forte incitation succède à une période où les programmes mettaient l'accent sur le rôle de l'expérience facilitée par les technologies dans les domaines des nombres et de la géométrie. Une lecture attentive de tous les documents officiels publiés depuis 2000 montre une incitation de plus en plus forte pour une pratique de la démarche d'investigation sans qu'à aucun moment le terme d'investigation ne soit défini de manière précise. Toute la terminologie associée à une démarche expérimentale médiée ou pas par la technologie n'y est pas plus précisée.

- Des pratiques sont recommandées (narrations de recherche issues des travaux de l'IREM de Montpellier par exemple) ; d'autres moins connues comme les problèmes longs de l'IREM de Lyon auraient mérité une plus large diffusion.
- D'autres pratiques ont été imposées, comme les TPE associant d'autres disciplines ou comme MPS récemment.
- D'autres pratiques se sont diffusées grâce à un appui financier institutionnel qui leur permet de vivre, comme les recherches développées sous le label MATh.en.JEANS ou Hippocampe.

Les questions cruciales qui se posent d'abord à l'enseignant sont les suivantes : Qu'est-ce que la démarche d'investigation ? Comment la caractériser ? Comment la pratiquer et comment l'évaluer ? Ou au mieux, comment mesurer son impact dans l'apprentissage ?
Je pense qu'il est de la plus grande importance de répondre clairement à ces questions et au moins à la première de ces questions, afin que l'enseignant soit maître de ses choix didactiques même s'il travaille en équipe et surtout s'il travaille en équipe.

1.2. Un long cheminement vers un format vidéo pour faire connaître et pratiquer cette démarche d'investigation

Depuis le début des années 90, j'ai beaucoup réfléchi à cette question et proposé des réponses aux stagiaires de 2$^{\text{nde}}$ année de l'IUFM de Toulouse où j'étais formateur associé (niveau PLP2). Une manière pertinente d'utiliser les calculatrices pour des investigations nouvelles et des scénarios d'enseignement nouveaux ont été proposés. Ces propositions ont fait l'objet de multiples présentations durant les ateliers de journées de l'APMEP depuis 1996.
Mais depuis le début des années 2000 je me suis attelé à cette tâche de manière systématique :
- En participant à la rédaction des ouvrages de seconde et de première de la collection Belin, j'ai permis l'édition de **deux CD d'accompagnement** du livre du professeur dans lesquels des centaines de fichiers Cabri, Géoplan, Excel, des dizaines de programme pour les calculatrices TI et Casio illustraient des exercices proposés aux élèves
- En proposant des **scénarisations de situations d'enseignement** concernant Pythagore, Thalès et d'autres avec Cabri dans un **format** qui mettaient à la disposition des professeurs **6 documents** (3 fichiers de géométrie dynamique et 3 fichiers texte). Ce travail a été le résultat d'une recherche menée avec un professeur du terrain (Myriam Bouloc-Rossato). Nous avons tout de suite noté que l'accueil enthousiaste des enseignants était quand même tempéré par le temps d'appropriation des documents même si tout était fourni.
- En proposant en ligne le résumé de la présentation faites aux journées de l'APMEP de Paris en 2010 sur une nouvelle manière d'enseigner les notions de périmètre, aire et volume grâce à Cabri 2 Plus et Cabri 3D (consultable en ligne à l'adresse http://www.irem.ups-tlse.fr/dahan/). La nouveauté a été que le **texte était interactif** : toutes les figures pouvaient être animées en ligne (grâce à l'utilisation des ActiveX de Cabri). Mais la grande originalité fut de créer **une vidéo pour chaque figure** qui en détaillait la scénarisation : 23 vidéos postées sur YouTube ont constitué l'amorce de ma chaîne dont nous allons parler dans la suite de cet article. Cette chaîne est accessible à l'adresse http://www.youtube.com/user/jjdahan24071946?blend=1&ob=video-mustangbase.
(elle contient à ce jour environ 120 vidéos, visualisées environ 26000 fois depuis plus de 130 pays ; le pourcentage de vues en France est de 45%)

Le pilier central de tout ce travail est ma recherche soutenue par l'INRP qui a conduit en 2005 à la soutenance d'une thèse ([4]) sur la démarche expérimentale médiée par la technologie en mathématiques (téléchargeable à l'adresse http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00356107/fr/)

La suite logique de cette recherche consista en une collaboration avec des professeurs du terrain (convention de recherche entre l'IREM de Toulouse et le collège Anatole

France de Casablanca puis le pôle Casablanca de l'AEFE) pour essayer de dégager un **format pertinent de ressources** qui puissent être facilement consultables et utilisables sans éventuellement avoir de connaissances spécifiques sur un logiciel. Leur format devait permettre :
1. Une **information-formation** de l'enseignant sur ce qu'est la démarche expérimentale de découverte en général et la démarche d'investigation avec les techniques qui lui sont associées, en particulier
2. Une utilisation en tant qu'activité investigative qu'il pourra mener avec ses élèves.

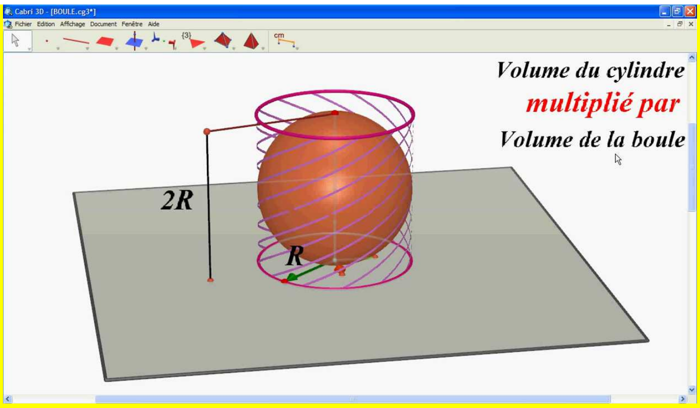
Le format auquel ce long cheminement a mené est le format vidéo qui sera présenté et illustré ci-dessous.

1.3. Mes objectifs pour cet article
Cette longue introduction avait pour but de montrer que le travail d'exemplification qui va suivre est sous-tendu par une réflexion théorique sur la démarche expérimentale s'appuyant à la fois sur ma longue expérience personnelle
- d'enseignant utilisateur des technologies,
- de formateur en formation initiale ou continue (IUFM de Toulouse et IREM de Toulouse),
- de travail de recherche sur le terrain avec des enseignants et plus particulièrement Mme Bouloc-Rossato dans les divers établissements où elle a enseigné (Collège Fabre de Rodez, collège Anatole France de Casablanca, et lycée Lyautey de Casablanca)

mais aussi sur mon expertise dans l'utilisation des environnements de géométrie dynamique Cabri (2 Plus et 3D).

Je vais à la fois présenter une formalisation de la démarche expérimentale et des exemples de telles démarches en situation pour mieux comprendre toute la terminologie de l'expérimental à laquelle il faut bien se référer et montrer le rôle des vidéos dans la modélisation d'une telle démarche. Je mettrai en évidence la nécessité d'un choix d'exemples devant susciter un besoin de preuve d'un niveau supérieur à celui de la validation expérimentale (plus communément appelée preuve expérimentale). Le chemin vers la « nécessité » (dans le sens de « besoin impérieux ») de la démonstration sera donc abordé avec des pistes que nous avons expérimentées.
Je ne vais pas commencer mon exposé par des définitions théoriques. Laissons nos expérimentations nous mener à elles pas à pas. Nous utiliserons les logiciel Cabri 2 Plus et Cabri 3D.

2. Deux investigations pour deux conjectures
2.1. Pour découvrir expérimentalement la formule donnant le volume d'une sphère (en fonction de son rayon)
2.1.1. Lecture de la première vidéo
Démarrez la vidéo **volume_sphere.avi** qui suit, qui vous montrera la démarche proposée.
Cette vidéo est consultable en ligne à l'adresse http://youtu.be/4p-AjDV-Wh8.

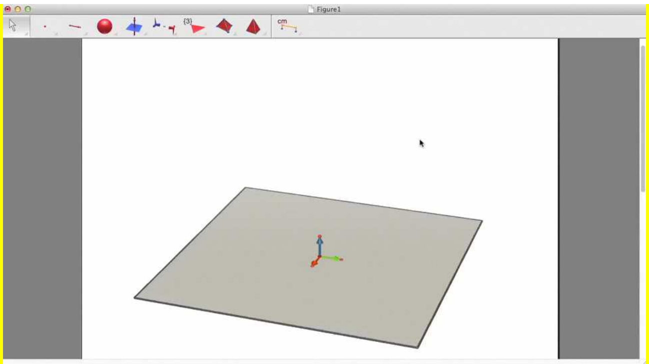


Vidéo **volume_sphere.avi**
(double clic sur l'image pour démarrer la vidéo)

Cette vidéo a été réalisée avec le fichier Cabri 3D, **BOULE.cg3**.

NB : le prérequis pour cette investigation est le suivant
On suppose que la formule donnant le volume d'un cylindre est connue.

Très brièvement, nous construisons une sphère et son cylindre circonscrit et essayons de découvrir une relation possible entre leurs volumes à partir d'une collecte de mesures que l'on est amené à observer ou à traiter pour arriver à la conjecture concernant le résultat attendu.
Cette démarche partant du réel ou du réel modélisé par Cabri 3D va mobiliser **notre aptitude à induire** (qu'on nomme « **intuition** ») ce qui caractérise plutôt un raisonnement de type empiriste (en règle « générale » opposé à un raisonnement de type rationaliste)
Rappelons qu'un raisonnement est un processus cognitif qui permet d'obtenir de nouveaux résultats ou de vérifier un fait en faisant appel à différentes « lois » ou expériences quel que soit leur domaine d'application.
2.1.2. Présentation de l'expérience 1
Montage : on construit une sphère et le cylindre circonscrit à cette sphère. Notons R le rayon de cette sphère ; le cylindre a une base circulaire de rayon R et comme hauteur 2R. Nous savons donc que son volume V_C est donné par la formule $2\Pi R^3$. Le rayon de la sphère peut être modifié en déplaçant un point du cercle de base de son cylindre circonscrit. Notre but est d'**expérimenter** dans le but de deviner la formule donnant le volume V_S de la sphère en fonction de R.
Ce montage est décrit dans la vidéo **montage1** accessible à l'adresse http://youtu.be/91quEcBbXE0 ou directement à partir de la vignette suivante.

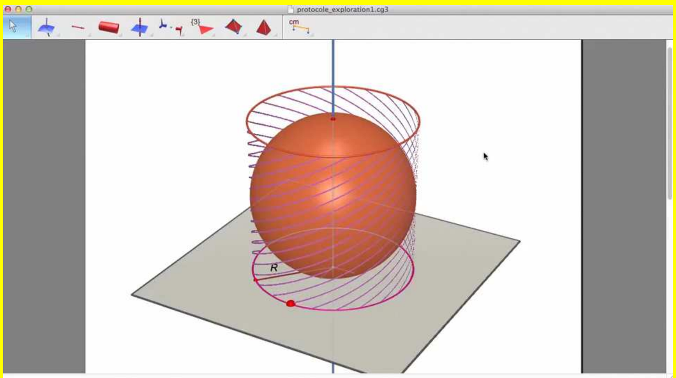


Vidéo **montage1**
(double clic sur l'image pour démarrer la vidéo)

Cette vidéo a été réalisée avec le fichier Cabri 3D, **montage1.cg3**.

Protocole : c'est la planification de ce qui devra être entrepris dans la phase suivante d'exploration. Nous devrons afficher les volumes respectifs du cylindre et de la sphère fournis par le logiciel, puis observer les variations relatives de ces données quand on modifiera R. Si nous devinons une relation, nous devrons la vérifier expérimentalement au cours d'une seconde expérience.
Exploration : c'est l'exécution du protocole au cours duquel les données sont produites et visualisées.

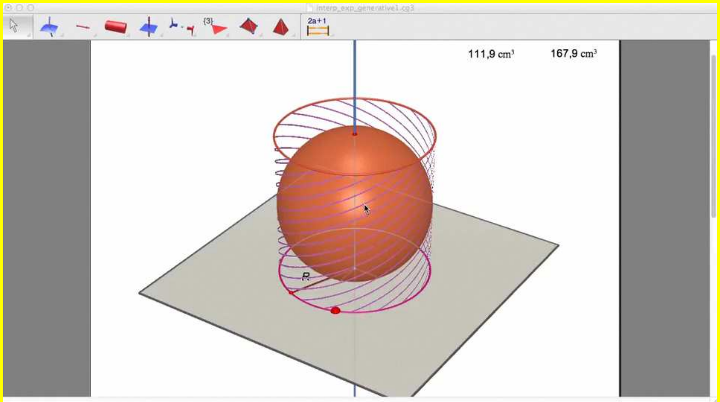
Ce protocole et cette exploration sont décrits dans la vidéo **protocole_exploration1** accessible à l'adresse http://youtu.be/L0vhpWkWkvI ou directement à partir de la vignette suivante.



Vidéo **protocole_exploration1**
(double clic sur l'image pour démarrer la vidéo)

Cette vidéo a été réalisée avec le fichier Cabri 3D, **protocole_exploration1.cg3**.

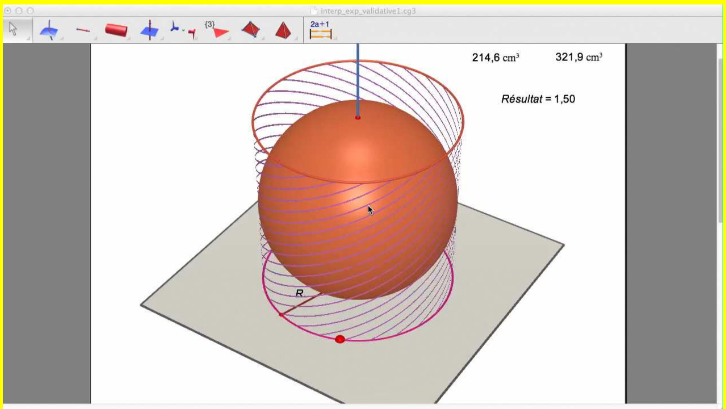
Interprétation : notre faculté à induire est mobilisée pour deviner à partir des quelques données fournies, une formule qui serait vraie dans le cas général. C'est la phase de traitement inductif des données.
Cette interprétation pourra se traduire par une conjecture : nous aurons mené une **expérience générative**.
Cette interprétation est décrite dans la vidéo **interp_exp_generative1** accessible à l'adresse http://youtu.be/1zMF5bdpskIou directement à partir de la vignette suivante



Vidéo **interp_exp_generative1**
(double clic sur l'image pour démarrer la vidéo)

Cette vidéo a été réalisée avec le fichier Cabri 3D, **interp_exp_generative1.cg3**.

Lorsque nous faisons des vérifications expérimentales, nous parlons **d'expérience validative**.
Une telle expérience est décrite dans la vidéo **interp_exp_validative1** accessible à l'adresse http://youtu.be/RY1yZhm-iYw ou directement à partir de la vignette suivante.



Vidéo **interp_exp_validative1**
(double clic sur l'image pour démarrer la vidéo)

Cette vidéo a été réalisée avec le fichier Cabri 3D, **interp_exp_validative1.cg3**.

2.1.3. Exécution de l'expérience 1 (expérimentation 1) et sa conclusion

Quand on modifie R, l'examen des données affichées ne mène pas facilement (vu ci-dessus) à une conjecture sauf si on s'arrange pour que le volume de la sphère soit voisin d'un entier multiple de 100 et dans ce cas on peut deviner que celui du cylindre semble être 1.5 fois celui de la sphère (en effet quand V_S est voisin de 100, V_C est voisin de 150, quand V_S est voisin de 200, V_C est voisin de 300, quand V_S est voisin de 300, V_C est voisin de 450…) . Sinon la technique naturelle qui s'impose est celle qui consiste à évaluer avec la calculatrice du logiciel le rapport des deux volumes pour voir apparaître l'invariant. La conjecture qui se dégage de l'**expérimentation*** est que les données générées pour V_C semblent être obtenues en multipliant les données générées pour V_S par 1.5.

La conséquence (ou plutôt l'inférence) immédiate est que $V_C = 1.5.\ V_S$ soit

$V_S = \frac{2}{3}V_C = \frac{2}{3}2\Pi R^3 = \frac{4}{3}\Pi R^3$ qui est la formule connue.

***Une expérimentation est la réalisation d'une expérience : une expérience serait comme un programme et une expérimentation serait une réalisation de ce programme.**

2.1.4. Qu'avons-nous fait ?

Nous avons mis en place une **expérience, c'est-à-dire une procédure devant générer des données** dont l'**interprétation** doit mener soit à une **conjecture** soit à la **confirmation** ou au **rejet** d'une conjecture.

L'expérience 1 est une expérience générative car les données produites nous ont conduit à produire la conjecture $V_C = 1.5.\ V_S$ c'est-à-dire à la conjecture attendue sur le volume de la sphère $V_S = \frac{4}{3}\Pi R^3$. Notons qu'un affichage des données avec plus de décimales doit amener les élèves qui utilisent leur calculatrice à mieux sentir le bon invariant, **1.5.**

Une seconde expérience validative (vue dans une vidéo ci-dessus) aurait pu être menée. Elle aurait consisté en le calcul de l'expression $\frac{4}{3}\Pi R^3$ par la calculatrice du logiciel avec pour valeur de R le rayon de la sphère et la comparaison du résultat obtenu avec le résultat affiché. L'identité des résultats doit perdurer aussi bien quand on change le rayon que quand on augmente la précision de l'affichage numérique. Ces observations s'interprètent comme une validation de la formule conjecturée (le mot « validation » est utilisé ici dans le sens de « corroboration », de « non rejet » de la conjecture avancée). Une telle expérience est une **expérience validative**. Notons que pour mener cette expérience (pour la réaliser, c'est-à-dire pour expérimenter), il aura fallu modifier le montage et donc le protocole. La technique mise en œuvre pour la validation est une technique de comparaison des données produites à celles générées par la formule conjecturée.

Quelques remarques sur l'expérimental

Une expérience se compose toujours, même si ce n'est pas de manière explicite, des 4 maillons, **montage-protocole-exploration-interprétation**. En géométrie dynamique il y a **interpénétration** des deux premiers maillons car la manière dont la figure est construite dicte la manière dont celle-ci peut être manipulée. L'exploration consiste le plus souvent en la génération des données pertinentes. Notons que de manière plus générale, une **exploration est une manière d'agir propre à nous faire avancer vers une meilleure connaissance d'un phénomène** (à **découvrir des indices** permettant d'avancer vers cette connaissance). Nous remarquons que dans ce processus, nous avons généré deux séries de données pour essayer de mettre en évidence une relation de proportionnalité. Cela doit être obtenu tout simplement en demandant d'afficher le rapport des deux volumes qui seront produits par la réalisation de l'expérience puis en observant si ce rapport reste invariant ou pas. Ce processus est une technique bien connue en sciences expérimentales (même en mathématiques quand on est amené à deviner une formule qui sera ensuite établie par récurrence). L'utilisation d'une telle technique qui nous donne beaucoup plus de chances de découvrir un invariant nous fait basculer dans le **monde de l'investigation**. Comme un enquêteur au cours d'une enquête criminelle qui va rechercher des données spécifiques pour les traiter de manière spécifique (recherche d'empreintes digitales pour les comparer aux empreintes d'un fichier répertoriant des empreintes connues), nous utilisons une technique qui nous donne des chances d'aboutir sans la garantie finale de succès. **Dès qu'une technique connue est utilisée dans une démarche expérimentale, nous parlerons d'investigation**. Il est bien évident que toute investigation, puisqu'elle est associée à une technique, s'appuie sur des connaissances. Des recherches réalisées en Angleterre dans le cadre du projet PACKS ([2]), ont d'ailleurs mené à la création d'une épreuve d'investigation ouverte dont l'objectif est plus de mesurer les connaissances des élèves à l'occasion des initiatives prises sur le problème qui leur était proposé que leur aptitude à réaliser des « montages » (pour nous, réaliser des figures dynamiques).

2.1.5. Le rôle de la vidéo (après ce premier exemple)

- Cette vidéo qui dure 3 minutes et 12 secondes est la seconde vidéo la plus regardée de ma chaîne YouTube (près de 2300 vues depuis plus de 90 pays différents soit environ 9% de toutes les vues ; notons qu'à ce jour la chaîne contient 120 vidéos). Celle-ci a donc suscité un certain intérêt. Notons que la moyenne du temps de visualisation pour cette vidéo est d'environ 1minute et 20 secondes (ce qui correspond à la moyenne pour l'ensemble de la chaîne). Cela signifie, pour commencer, que le temps pour communiquer est limité et l'efficacité devrait nous conduire à des vidéos d'une durée n'allant pas trop au delà de la minute (à des exceptions près que nous évoquerons plus loin).

Après ces généralités dégageons les raisons qui peuvent justifier de la pertinence didactique d'une telle vidéo. Pour cela, faisons une première tentative pour détailler les principales fonctions didactiques d'une telle vidéo :

- <u>Sa première fonction</u> est de fournir un **scénario d'investigation** à partir d'un fichier très simple à construire où l'enseignant découvrira l'approche empirique d'une recherche et la manière de la mener en classe.
- <u>Sa seconde fonction</u> est de faire comprendre à l'enseignant qu'une **investigation** est associée à une **technique**.
- <u>Sa troisième fonction</u> est d'être une **ressource** à part entière, dans la mesure où la lecture de la vidéo avec des pauses bien choisies doit permettre à l'enseignant d'animer une recherche investigative avec sa classe comme s'il disposait du fichier de géométrie dynamique utilisé.
- <u>Sa quatrième fonction</u> est de distiller une **terminologie de l'expérimental** (avec des mots qui prennent sens dans leur contexte d'utilisation : *expérience*, *expérimentation*, *conjecture*, *validation* et bien d'autres) et de familiariser les élèves avec des **techniques d'investigation** qu'ils pourront mettre en œuvre à d'autres occasions (ici, c'était la technique de traitement d'une série statistique double afin d'en dégager une relation de proportionnalité ou de linéarité : c'est d'ailleurs la première technique à laquelle on doit penser dans de tels traitements de données).

<u>Sa cinquième fonction</u> est d'être un **référent de travail** pour l'élève qui a la possibilité de revenir **en ligne** sur le travail fait : il retrouvera la démarche et s'en imprégnera (et plus particulièrement de la technique d'investigation utilisée).

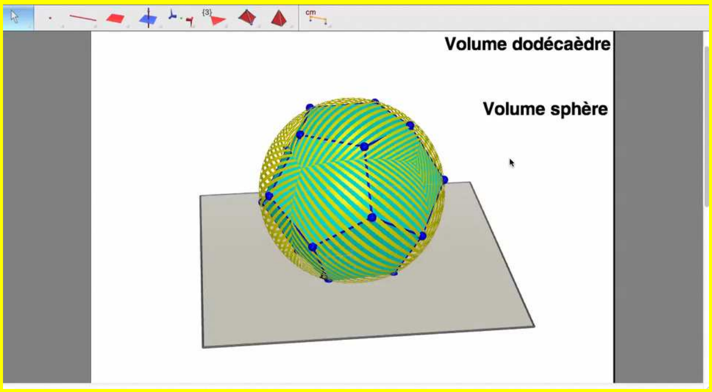
2.2. Pour découvrir expérimentalement la formule donnant le volume d'un dodécaèdre (en fonction du rayon de sa sphère circonscrite)

Le choix de ce second exemple n'est pas anodin. Quand vous prendrez connaissance du début de la vidéo qui l'illustre, vous aurez certainement l'impression de revivre l'investigation précédente puisqu'on va s'appuyer sur une formule connue pour essayer d'en conjecturer une autre en utilisant la même technique investigative que la précédente. Soyez patients et vous découvrirez d'autres fonctions de cette vidéo dans le cadre de l'illustration de la démarche d'investigation.

On suppose ici que la formule donnant le volume d'une sphère est connue

2.2.1. Lecture de la seconde vidéo

Démarrez la vidéo **Investigation_volume_dodécaèdre** qui suit qui vous montrera la nouvelle démarche proposée.
Cette vidéo est consultable en ligne à l'adresse http://youtu.be/ZZEIh4ALHPE.



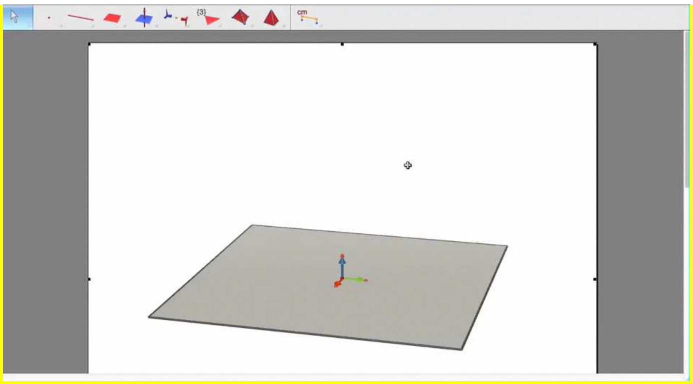
Vidéo **Investigation_volume_dodécaèdre**
(double clic sur l'image pour démarrer la vidéo)

Cette vidéo a été réalisée avec le fichier Cabri 3D, **DODECA.cg3**.

Encore, très brièvement, nous construisons un dodécaèdre posé sur le plan de référence puis sa sphère circonscrite. Dans un premier temps, on essaie encore de découvrir une relation possible entre leurs volumes à partir d'une collecte de mesures que l'on est amené à observer ou à traiter pour arriver à la conjecture concernant le résultat attendu. Dans un second temps, on tente de valider la formule conjecturée par comparaison aux volumes affichés par le logiciel. A ce moment, on comprendra l'accouplement de cet exemple au précédent pour montrer comment on peut amener les élèves à passer de la conjecture à la nécessité d'une démonstration.

2.2.2. Présentation de l'expérience 1'

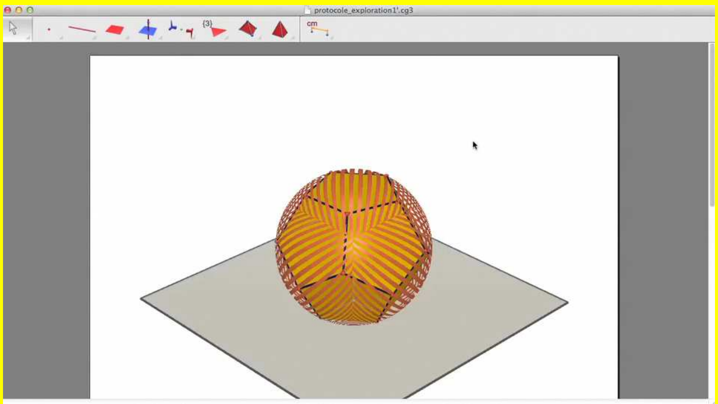
Montage : on construit un dodécaèdre et sa sphère circonscrite. Notons R le rayon de cette sphère. Nous savons donc que le volume V_S de la sphère est donné par la formule $\frac{4}{3}\Pi R^3$. Le rayon de la sphère (donc les dimensions du dodécaèdre) peut être modifié en déplaçant un point du pentagone de base du dodécaèdre. Notre but est d'**expérimenter** dans le but de deviner une relation entre V_S et V_D afin d'en déduire la formule donnant le volume V_D du dodécaèdre en fonction de R.
Ce montage est décrit dans la vidéo **montage1'** accessible à l'adresse http://youtu.be/ZKkrgCuYg7c ou directement à partir de la vignette suivante.



Vidéo **montage1'**
(double clic sur l'image pour démarrer la vidéo)

Cette vidéo a été réalisée avec le fichier Cabri 3D, **montage1'.cg3**.

Protocole : c'est toujours la planification de ce qui devra être entrepris dans les deux phases suivantes. Nous devrons afficher les volumes respectifs du dodécaèdre et de la sphère fournis par le logiciel, puis observer les variations relatives de ces données quand on modifiera R. Si nous devinons en utilisant les mêmes techniques que dans l'investigation précédente, une relation entre V_S et V_D, nous devrons la vérifier expérimentalement au cours d'une seconde expérience.
Exploration : c'est l'exécution du protocole au cours duquel les données sont produites et visualisées.
Ce protocole et cette exploration sont décrits dans la vidéo **protocole_exploration1'** accessible à l'adresse http://youtu.be/NF8TMuaJGRU ou directement à partir de la vignette suivante.



Vidéo **protocole_exploration1'**
(double clic sur l'image pour démarrer la vidéo)

Cette vidéo a été réalisée avec le fichier Cabri 3D, **protocole_exploration1'.cg3**.

Interprétation : c'est toujours notre faculté à induire qui est mobilisée pour deviner à partir des quelques données fournies une formule qui serait vraie dans le cas général. C'est la phase de traitement inductif des données.
2.2.3. Exécution de l'expérience 1' (expérimentation 1') et sa conclusion

Quand on modifie R, l'utilisation des techniques précédentes nous conduit à une conjecture curieusement semblable, c'est-à-dire que $V_S = 1.5.V_D$ et donc que $V_D = \frac{2}{3} V_S$. Enfin le volume du dodécaèdre serait donné par la formule $V_D = \frac{2}{3}\frac{4}{3}\Pi R^3$ soit

$V_D = \frac{8}{9}\Pi R^3$.

Je dois avouer que j'ai été fort surpris par le résultat de cette investigation. Je me sentais assez fier d'avoir découvert un résultat aussi simple avec une investigation somme toute élémentaire. Mais vous l'avez vu, si vous avez visionné la vidéo jusqu'au bout, j'ai ressenti un plus grand plaisir quand mes tentatives de validation se sont soldées par un rejet de cette conjecture. En effet, le problème crucial qui se pose à l'enseignant de mathématique qui alterne des phases empiriques et des phases de déductions logiques est le suivant : comment choisir la bonne investigation qui va faire que nos élèves expérimentateurs doutent, même de leurs inférences les plus « sûres ». Un tel exemple venant juste après le précédent me semble être la bonne investigation ou du moins une investigation adaptée.
La bonne formule pour le volume du dodécaèdre est la suivante :
Volume dodécaèdre = $\frac{2}{3\sqrt{3}}\left(5+\sqrt{5}\right)\boldsymbol{R}^3$ où $\boldsymbol{R}$ est le rayon de sa sphère circonscrite.
Pour plus d'information consulter le document en ligne de Benjamin Barras sur les polyèdres réguliers à l'adresse
http://boitamath.free.fr/FAC/agregation/geometrie_espace.pdf
Notons que nous aurions pu mener une expérimentation validative pour confirmer cette formule ; il aurait fallu calculer cette expression dans le logiciel pour R égal au rayon de la dite sphère et comparer au volume affiché directement par le logiciel. Les résultats affichés doivent être les mêmes, même avec un affichage maximum de chiffres significatifs et même quand on modifie le rayon de la sphère. Attention, cette validation expérimentale, n'est qu'une vérification avec la précision du logiciel d'une condition nécessaire impliquée par notre formule dans un grand nombre de cas certes, mais pas dans tous les cas. La démonstration est le pas à franchir pour être sûr de la formule avancée.

2.2.4. Qu'apprend-on de plus avec cette vidéo sur la démarche d'investigation ?

Si on mène une investigation expérimentale, c'est qu'on espère que celle-ci va nous conduire à la « découverte ». Le fait d'utiliser des **techniques référencées** nous rassure quand à l'aide que ces techniques peuvent apporter à notre intuition : ces techniques nous permettent un traitement méthodique des données générées par expérimentation avec une relative confiance dans « l'apparition » d'un invariant. Nous accordons donc une plus grande valeur **heuristique** à une **investigation** en raison de ces **techniques** qui la fondent. Mais l'induction aussi puissante soit-elle, on l'a vu, peut nous conduire (induire) à l'erreur.
Pourquoi nous sommes nous fourvoyés dans cette seconde investigation ? La raison tient d'abord à notre confiance en l'harmonie mathématique : si un invariant semble être un nombre simple, nous ne pouvons imaginer que cela puisse ne pas être le cas. Je dois d'ailleurs reconnaître que je suis « tombé » sur cette investigation tout à fait par hasard en préparant la conférence donnée en Juin 2012 devant la commission inter IREM lycée réunie à Toulouse sur le thème de la démarche d'investigation au lycée. Mon objectif était à l'origine de trouver un exemple d'investigation analogue au premier présenté mais, portant sur des objets moins connus. Vous connaissez la suite. Elle tient aussi au fait que dès qu'on arrive à une découverte, la phase de validation qui suit est toujours

une phase très brouillonne où on fait preuve de moins de méticulosité (penser aux témoignages bien connus de Poincaré et Hadamard). Ici en particulier, je n'avais pas pensé à augmenter le nombre de décimales du quotient affiché **1.50**. Ce type de comportement avait déjà été noté dans ma thèse quand on observait le niveau des techniques de validation qui suivaient immédiatement l'apparition de la conjecture qu'on pense être la bonne (dont le degré de plausibilité a dépassé le seuil qui va faire que nous nous sentons convaincus). Ce niveau dans les problèmes de géométrie est un niveau très élémentaire (niveau G1 ou G1 informatique où la validation est essentiellement perceptive).
Nous avons compris le **rôle du doute** dans cette démarche. Douter jusqu'à une prochaine vérification, jusqu'à une prochaine validation, est fondamental pour aiguiser **l'esprit critique**, pour encourager un travail de groupe et l'argumentation.
Quelquefois, la visualisation d'un résultat dans un unique cas particulier est tellement sidérante que les spécialistes rejettent le doute le plus élémentaire. Roger Cuppens me racontait un épisode d'une de ses recherches qui l'avait mené à expérimenter par le biais d'une figure assez complexe qu'il avait réalisée avec Cabri 2. Il voulait faire une investigation sur la valeur d'un birapport dans des positions particulières obtenues par redéfinition : le premier affichage qu'il obtint fut la valeur -1. Pour lui cet unique affichage était tellement particulier qu'il ne pouvait être du au hasard. Il m'a raconté qu'il n'avait même pas manipulé sa figure pour obtenir des validations par d'autres cas particuliers. Il était assez convaincu pour passer immédiatement à la démonstration. Ce comportement repose sur une base de connaissances très étendue et une maîtrise d'un ensemble de configurations relatives au sujet étudié au dessus de la moyenne.

3. D'autres vidéos pour illustrer et mettre en œuvre d'autres techniques d'investigation

3.1. Les cadres d'investigations ouvertes selon Lubben et Millar

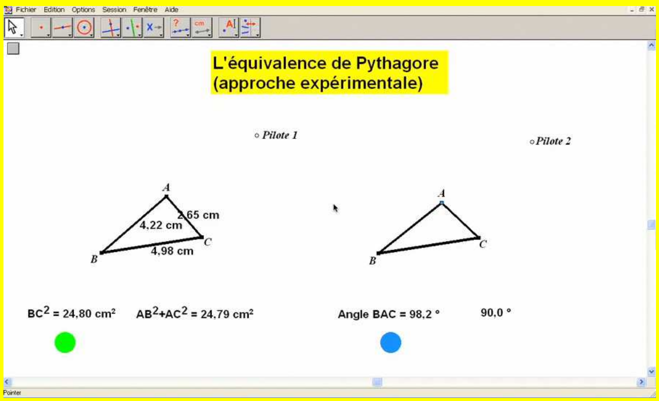
Nous avons évoqué ci-dessus le projet de recherche anglo-saxon PACKS (Procedural and Conceptual Knowledge in Science) qui a conduit à classifier les cadres d'investigations qui étaient mis en œuvre pour aborder expérimentalement des problèmes ouverts. Je rappelle que dans cette recherche, le but de l'investigation menée par l'élève n'avait pas le même but que celui de l'enseignant qui propose la recherche. L'enseignant cherche à mesurer les connaissances mises en œuvre ([2]). Rappelons qu'il existe toujours à l'agrégation de physique en France une épreuve dite de montage. Certes, des connaissances sont mises en jeu mais ce sont surtout les aptitudes manipulatoires qui sont évaluées. Quatre cadres d'investigation ont donc été mis en évidence à la suite de cette recherche :
Le cadre d'engagement : on expérimente pour expérimenter sans savoir où l'on va.
Le cadre de modélisation : on modélise pour reproduire un phénomène.
Le cadre d'ingénierie : on essaie d'optimiser un effet souhaité (au hasard ou par itération).
Le cadre scientifique : on essaie d'apprécier des tendances à partir de deux ou plusieurs valeurs observées.
Les deux exemples donnés illustrent typiquement le cadre d'investigation scientifique. Nous allons présenter d'autres exemples illustrant le cadre d'ingénierie, cadre où le rôle monstratif de la vidéo s'avère puissant.
Rappelons les deux types de modèle possibles auxquels on peut se référer :

Le modèle concret qui rend compte d'un phénomène abstrait ; dans ce cas c'est « *une matérialisation des énoncés de la science dans un objet concret presqu'autonome, que l'intuition ou la pensée ont des facilités pour cerner* ».
Le modèle abstrait qui rend compte d'un phénomène concret et dans ce cas, c'est « *une transcription abstraite mais contrôlée par la pensée logique et mathématique d'une réalité concrète, empirique, dont l'étude directe ne donnerait que des relations approximatives* ».

3.2. Une investigation utilisant la technique des lieux mous (niveau collège)

3.2.1. Présentation de la vidéo et sa lecture

Cette investigation est présentée dans la vidéo **Equivalence_de_Pythagore** consultable à l'adresse http://youtu.be/xVraGuiyNnk
Vous pouvez la visualiser en double cliquant sur la vignette ci-dessous



Vidéo **Equivalence_de_Pythagore**
(double clic sur l'image pour démarrer la vidéo)

Cette vidéo a été réalisée avec le fichier Cabri 2 Plus, **PREUVE_MOLLE.fig**.

3.2.2. Présentation de l'investigation

Vous avez pu constater que cette expérimentation commence par la présentation du montage, deux triangles s'appuyant sur une base [BC] de même longueur et le sommet A qui peut être déplacé à partir d'un point pilote, un pour chaque triangle. On montre ensuite que les déplacements des deux points A génèrent des traces à chaque fois de deux couleurs différentes.
Cet effet a été obtenu par la technique des constructions conditionnelles de Geneviève Tulloue. Au passage, je recommande fortement son site « Figures animées pour la physique » à l'adresse http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/
Dans le premier cas les deux couleurs de traces dépendent des conditions
« $BC^2 > AB^2 + AC^2$ » ou « $BC^2 < AB^2 + AC^2$ ».
Dans le second cas, ces deux couleurs dépendent des conditions
« Angle BAC > 90° » ou « Angle BAC < 90° ».
L'expérience consiste à déplacer les points pilotes pour repérer grâce à leurs traces les points A vérifiant les conditions ci-dessus.
La réalisation de cette expérience (l'expérimentation qui lui est associée), produit un très grand nombre de données (des traces) qui sont interprétées dans une étape ultérieure. Notons que nous ne balayons pas tout le plan mais une zone relativement proche des points B et C. Notons aussi que l'utilisation de la vidéo, permet d'éviter

d'avoir à réaliser la figure Cabri (ce qui demande une certaine expertise) mais aussi d'avoir à utiliser le logiciel.
Ce que l'on obtient dans les deux cas, c'est une trace qui occupe, semble-t-il, le disque de diamètre [BC] et une autre, qui occupe l'extérieur de ce disque.
Les interprétations que l'on fait, peuvent se traduire sous forme de conjectures
L'ensemble des points A du plan vérifiant « $BC^2 > AB^2+AC^2$ » est l'intérieur du disque de diamètre [BC].
L'ensemble des points A du plan vérifiant « $BC^2 < AB^2+AC^2$ » est l'extérieur du disque de diamètre [BC].
Par voie de conséquence et appliquant le théorème des valeurs intermédiaires en actes (ce que les élèves font de manière automatique), on arrive à la conjecture 1 qui dit que :
L'ensemble des points A du plan vérifiant « $BC^2 = AB^2+AC^2$ », est le cercle de diamètre [BC].
Le même raisonnement sur le second triangle nous conduit cette fois à la conjecture 2 qui dit que :
L'ensemble des points A du plan vérifiant « Angle BAC = 90° », est le cercle de diamètre [BC].
Si nous groupons ces deux conjectures, nous en inférons la conjecture 3 qui dit :
Il y a identité entre l'ensemble des points du plan vérifiant « $BC^2 = AB^2+AC^2$ » et ceux vérifiant « Angle BAC = 90° ».
Cette dernière conjecture n'est autre que la propriété énonçant le **théorème de Pythagore** sous sa forme de « **condition nécessaire et suffisante** ».
Nous avons donc mené une expérimentation générative puisqu'elle a conduit à une conjecture. De plus, une technique bien précise a été utilisée, alliant **constructions molles** (traces obtenues par balayages) et théorème des valeurs intermédiaires. Le cadre d'investigation est ici un cadre d'ingénierie au hasard car c'est un balayage aléatoire qui nous permet de repérer les deux catégories de points qui feront émerger les deux conjectures principales (la 1 et la 2)

3.2.3. Une investigation validative non réalisée

Si nos conjectures était vraies, elles impliqueraient comme conditions nécessaires que l'appartenance de A au cercle de diamètre [BC] génèrerait l'égalité des valeurs de BC^2 et $AB^2 + AC^2$ ainsi qu'une valeur d'angle BAC égale à 90° et ce, quelle que soit la position du point A sur ce cercle et quel que soit le nombre de décimales affichées. Cela peut être fait aisément avec le logiciel en construisant le cercle de diamètre [BC] et en redéfinissant A sur ce cercle. Peut-être se rendrait-on compte du problème posé par le positionnement de A sur B ou C ? problème qui n'en est pas un quand on se focalise sur le théorème de Pythagore qui nécessite l'utilisation d'un vrai triangle (trois points).
Notons que l'apparition de la conjecture se fait au niveau que nous avons qualifié de G1 Informatique (vérification perceptive sur l'écran de l'ordinateur mais sur une figure « calculée » par l'ordinateur) alors que la validation non effectuée ici (mais qui fonctionne), se fait à un niveau plus proche de la démonstration (la démonstration, , est au niveau G2) : ce niveau de vérification est qualifié de G2 Informatique (où le niveau de vérification est un niveau de déduction assisté par le logiciel). Ce niveau de vérification augmente le niveau de plausibilité de la conjecture ainsi « vérifiée ».

3.2.4. Le doute, le doute, toujours le doute

Même si cette investigation validative avait été menée et même si elle avait corroboré notre conjecture, nous ne pouvons garantir les égalités qu'avec la précision apportée par la technologie. De plus les vérifications n'auront été faites que pour un nombre limité de points du plan, même si ce nombre est important. Enfin, rappelons un point que j'ai découvert au cours de mon travail de thèse : on peut accéder dans le carré déterminé par 4 pixels contigus d'un écran à environ 64 milliards de points sur lesquels on peut faire toutes les vérifications permises sur les figures construites (du moins sous Cabri 2 Plus, dans l'environnement Windows et avec l'ordinateur utilisé à l'époque) : cette remarque montre que la plausibilité de notre conjecture reste entachée par le nombre infinitésimal de vérifications que nous pourrions faire. Mais c'est la magie de l'intuition, la magie de l'induction et la beauté des mathématiques qui nous amènent à découvrir à partir de poussières d'étoiles des propriétés de l'Univers. Tout cela pour rappeler qu'en sciences le doute est permanent en attendant la prochaine validation mais qu'en mathématiques, on peut quelquefois avoir le dernier mot avec la « démonstration ». Néanmoins, restons extrêmement modestes : n'oublions pas que Gödel avec ses théorèmes d'incomplétude a définitivement enterré les certitudes que nous aurions pu avoir à ce sujet. Paul Cohen a magistralement enfoncé le clou en démontrant que l'hypothèse du continu était indécidable (il a d'ailleurs obtenu en 1966 la médaille Fields pour ses travaux en liaison avec ce résultat en appliquant la méthode du forcing). Autre anecdote, Andrew Wiles raconte dans « Le dernier théorème de Fermat » écrit par Simon Singh, qu'au cours d'un de ses moments de découragement, il s'était presque persuadé que le théorème qu'il cherchait à démontrer était probablement indécidable. Il est curieux de constater que la communauté mathématique avance comme si Gödel n'avait pas existé en espérant que, toujours, la démonstration viendra en point d'orgue du processus de découverte…

3.2.5. Le rôle de la vidéo dans cet exemple

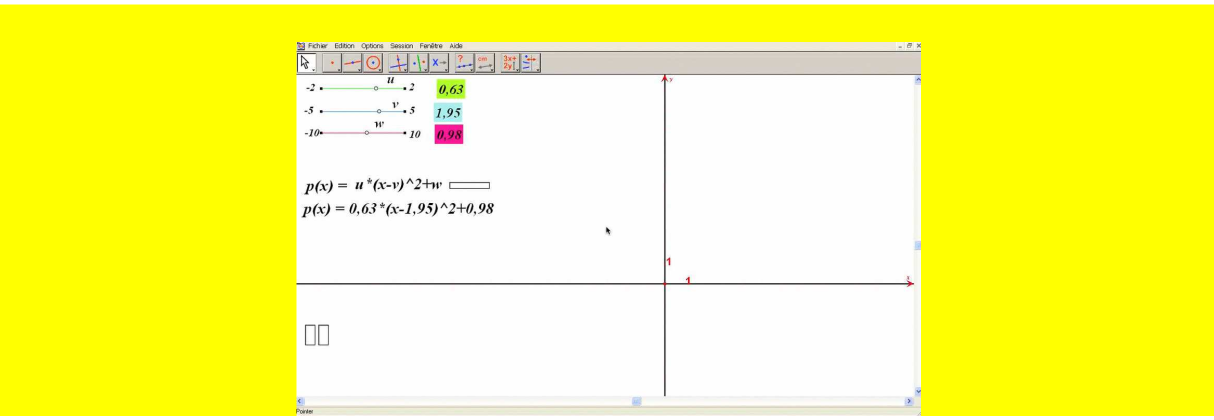
En quelques minutes, une investigation est présentée, réalisée, les conjectures atteintes avec des techniques bien précises qui nécessiteraient expertise et temps pour être mises en place. En quelques minutes, l'information est transmise. De plus comme on l'a vu ci-dessus, cette vidéo peut être utilisée par le professeur comme un outil d'investigation : le matériel est fourni à l'enseignant avec le mode d'emploi pour être utilisé en situation de classe. Cette vidéo constitue donc une ressource à part entière : une ressource pour la formation, l'information de l'enseignant mais aussi une ressource pour la mise en place d'une démarche expérimentale pour aller vers la découverte en utilisant des techniques qui font de cette démarche une investigation.

3.3. Une investigation utilisant un paramétrage multiple (niveau lycée)

3.3.1. Présentation de la vidéo et sa lecture

Cette investigation est présentée dans la vidéo **Decomposition_canonique_dynamique** consultable à l'adresse http://youtu.be/CMC6RdZAkoE

Vous pouvez la visualiser en double cliquant sur la vignette ci-dessous.



Vidéo **Decomposition_canonique_dynamique**
(double clic sur l'image pour démarrer la vidéo)

Cette vidéo a été réalisée avec le fichier Cabri 2 Plus, **Decomposition_canonique.fig**.

3.3.2. Présentation de l'investigation

Là encore, la vidéo commence par la présentation du montage, c'est-à-dire de la figure et de la manière de la manipuler. Le montage propose de faire apparaître grâce à un bouton **Cacher/Montrer** la courbe représentative de la fonction $p(x) = u(x\text{-}v)^2+w$. Ce montage propose aussi 3 curseurs pour commander les paramètres u, v et w.
Dans une première partie, une première expérience est proposée dont le protocole est le suivant : utiliser les curseurs pour modifier les valeurs de 3 paramètres afin d'en induire l'influence de ces paramètres sur la forme de la courbe.
L'expérience est réalisée et permet d'arriver à une conjecture sur le déplacement et la déformation de la courbe initiale qui semble pouvoir atteindre toutes formes « paraboliques » du plan même si les domaines des curseurs sont restreints.
Cette première partie est une exploration car on cherche à produire des données qui permettent de nous éclairer sur les formes de courbes dépendant de 3 paramètres sans *a priori* de chances d'aboutir. Cette exploration a été menée grâce à une expérimentation générative et mobilisé notre intuition, c'est-à-dire notre aptitude à deviner une loi générale à partir de l'examen de quelques cas particuliers.
La seconde partie se veut, elle, plutôt une investigation car c'est une expérience dont le résultat attendu est la découverte de la forme canonique d'un trinôme du second degré donné, avec utilisation d'une technique bien précise qui nous donne beaucoup de chances de conclure exactement, pour peu que le résultat ne soit pas complexe.
Cette technique consiste à afficher la courbe de la fonction f dont on désire trouver la forme canonique puis à modifier les valeurs des, paramètres u, v et w jusqu'à obtenir superposition de la courbe de p à celle de f. Les valeurs de u, v et w obtenues sont celles qu'on peut conjecturer être les bonnes à la précision près de l'expérience. Un peu de bon sens et d'intuition fait choisir les bonnes valeurs même quand le logiciel n'en fournit que des valeurs approchées. On comprend bien que si la fonction f est une fonction à coefficients entiers, les valeurs de u, v et w ne pourront être qu'entières ou rationnelles et donc une valeur affichée de 3.05 nous fait conjecturer 3 comme possible vraie valeur, idem pour 4.27 et 17/4…
L'avantage de cette technique, c'est qu'elle permet d'aboutir à un résultat qui peut être validé déductivement : le saut vers la démonstration est possible et simple. Il suffit de développer l'expression conjecturée pour p et voir si elle coïncide avec celle de la fonction f dont on se proposait d'effectuer la décomposition canonique. Si oui, la découverte est prouvée, sinon la découverte est « fausse ». Il faudra donc réexaminer les coefficients testés et voir comment les changer pour que le développement se fasse comme attendu (on est ramené à des techniques calculatoires papier crayon).
Finalement on a mené une investigation générative suivie d'une validation de type démonstration. Le cadre d'investigation est encore un cadre d'ingéniérie par itération : on voit qu'on a modifié les valeurs des paramètres de manière méthodique pour obtenir la superposition attendue. Les modifications n'ont pas été pratiquées au hasard mais résultent de la conjecture, résultat de l'exploration préliminaire.

3.3.3. Le rôle de la vidéo dans cet exemple

Plus que dans toute autre vidéo, la monstration du montage et du protocole permet d'entrer très rapidement dans la démarche d'investigation proposée et d'y adhérer. Le

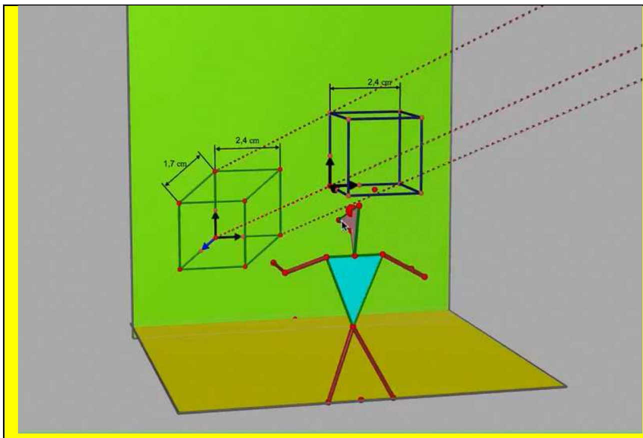
rôle de ressource formation-information pour l'enseignant est encore flagrant ainsi que son utilisation possible en classe pilotée par le professeur.
Ajoutons un point non encore signalé jusque là et concernant l'information de l'enseignant, chaque vidéo est accompagnée sur YouTube d'un commentaire explicatif et parfois raisonnablement didactique. Voici à titre documentaire, le commentaire qui accompagne cette vidéo :
« Cette vidéo réalisée avec Cabri 2 Plus montre expérimentalement comment on peut découvrir la décomposition canonique d'un trinôme du second degré. On visualise d'abord les courbes de fonctions y=u*(x-v)^2+w pour prendre conscience qu'elles semblent prendre les positions de toutes les paraboles du plan. On donne ensuite deux exemples qui permettent de superposer de telles courbes à des paraboles données et donc découvrir des valeurs approximatives des coefficients de la décomposition canonique d'un trinôme donné : il faudra au final prouver la véracité de la conjecture en développant l'expression découverte et constater qu'on retrouve bien le trinôme dont on se proposait de réaliser la décomposition canonique. ».
On peut constater que je suis resté très raisonnable concernant les intentions didactiques : seul le terme conjecture apparaît. Néanmoins, le montage et le protocole sont succinctement décrits.
Pour les utilisateurs de ma chaîne je conseille vivement de prendre connaissance de ces commentaires : ils permettent souvent, quand la vidéo est plus longue que la normale, de se faire à la fois une idée du contenu et de mes intentions avant visualisation.

4. Deux nouvelles investigations pour illustrer les cadres de modélisation

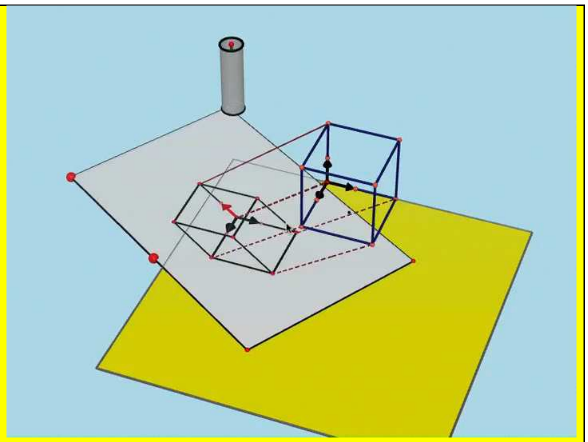
4.1. Modélisation des perspectives cavalières et militaires d'un cube

4.1.1. Deux investigations distinctes dans deux vidéos

Ces deux perspectives qui sont des perspectives axonométriques (projection sur un plan suivant une direction données) font l'objet de ce paragraphe. La première, la perspective cavalière, qui est utilisée de manière naturelle depuis que les élèves sont amenés à représenter des objets simples de l'espace sur une feuille de papier, l'est aussi,, dans beaucoup de manuels de cours du collège et du lycée. Mais à aucun moment dans la formation initiale des enseignants, une information claire n'est donnée, ni sur sa définition, ni sur ses caractéristiques. Il en est de même pour les élèves qui ne reçoivent que des bribes d'informations. L'enseignement de la représentation d'objets en perspective cavalière serait à mon avis bien plus profitable que d'autres items du programme, ne serait-ce que le travail sur la proportionnalité en liaison avec le coefficient d'une telle perspective.
C'est pourquoi, j'ai réalisé les deux vidéos qui suivent et qui modélisent de manière ludique la perspective cavalière par l'ombre projeté d'un cube sur un plan vertical face à l'observateur. Rappelons que la perspective militaire diffère de la cavalière par le plan de projection qui est le plan du sol par rapport à l'observateur.
Ce que je montre est une investigation générative dans un cadre de modélisation dans la mesure où les manipulations réalisées sur les figures utilisées doivent faire générer certaines des caractéristiques de chacune de ces perspectives
Ces deux vidéos sont consultables aux adresses respectives
http://youtu.be/HAqOkDKHc8I et http://youtu.be/EjkWbxzqtyE.
Vous pouvez aussi les visualiser en double cliquant sur les vignettes ci-dessous :



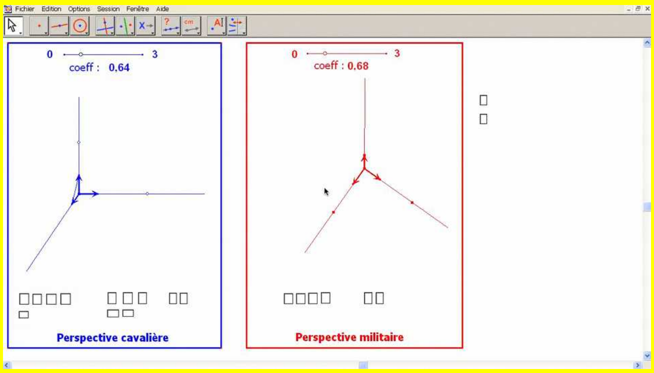
Vidéo **Perspective_cavaliere**


Vidéo **Perspective_militaire**

Ces vidéo ont été réalisées avec les fichiers Cabri 3D, **PC.cg3** et **PM.cg3**.

4.1.2. Deux investigations simultanées dans une vidéo

Pour voir comment appliquer les règles de représentations mises en évidence au cours des deux vidéos précédentes avec Cabri 3D, voici une nouvelle vidéo où l'on montre sur une figure Cabri 2 Plus des représentations simultanées d'objets tels que cercles, cylindres, pavés, cube. L'avantage de l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique par rapport à la feuille de papier est de bien voir que ces représentations ne sont pas une bonne représentation de ce que l'on voit, en particulier lorsqu'on fait pivoter un cube autour de son axe vertical. Cela permet aussi de voir l'intérêt pédagogique de la représentation en perspective militaire pour représenter des cubes à un niveau élémentaire : en particulier en évitant de représenter le carré de base par un parallélogramme mais par un vrai carré en vrai grandeur. Cette vidéo est consultable à l'adresse http://youtu.be/p6kp3o036w4
Vous pouvez aussi la visualiser en double cliquant sur la vignette ci-dessous :



Vidéo **Perspectives_cavaliere_et_militaire**
(double clic sur l'image pour démarrer la vidéo)

Cette vidéo a été réalisée avec le fichier Cabri 2 Plus, **perspectives.fig**.

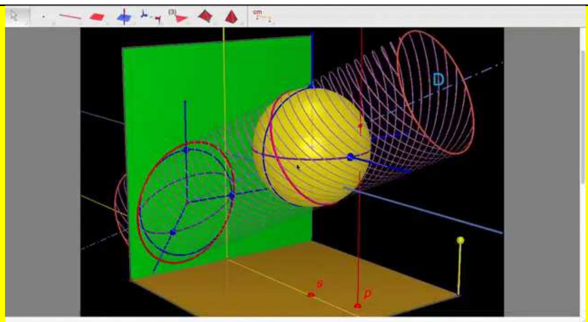
Là encore nous avons mené des investigations génératives dans un cadre de modélisation. Là encore, le pouvoir de la vidéo est l'accès quasi direct vers les notions à comprendre ou à manipuler, en utilisant de manière transparente le logiciel de géométrie dynamique choisi. Pour beaucoup, les constructions montrées peuvent faire l'objet d'activités manipulatoires dont l'objectif est en réalité une meilleure compréhension du concept associé à ces perspectives. Il est à noter que pendant plusieurs années, j'ai fais construire par mes élèves de seconde ou de première, un cercle en perspective cavalière et même un cube tournant comme cela a été montré dans cette vidéo.

4.2. Modélisation de la perspective cavalière d'une sphère

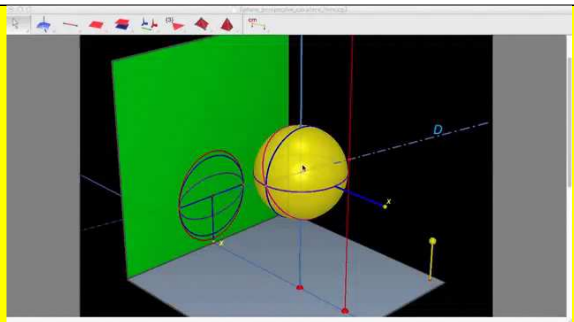
La représentation des corps dits ronds en perspective cavalière n'est pas un problème évident. Je me souviens qu'elle faisait l'objet d'une séance de formation pour les stagiaires IUFM de Toulouse au début des années 90, avant la diffusion de quelque logiciel de géométrie dynamique que ce soit. Ce travail se faisait en environnement papier crayon. J'ai le souvenir d'avoir commencé une telle séance par la rétro projection d'un transparent où l'on pouvait voir une représentation en perspective cavalière d'une sphère sous forme d'une ellipse. Mais c'est surtout la réaction offusquée de l'un des stagiaires qui m'est restée à l'esprit : celui-ci s'étonnait devant ses camarades que quelqu'un comme moi, qui ose avancer des « sottises pareilles », put être formateur à l'IUFM. Je ne me suis pas formalisé de ce comportement si peu diplomatique car j'ai vite compris que ce jeune professeur n'avait jamais rencontré, ni la définition de la perspective cavalière ni la définition d'aucune autre perspective. Je me suis contenté de lui demander à quoi ressemblait l'ombre d'un ballon sur la plage le soir au soleil couchant : est-ce un disque parfait comme il le prétendait ou une forme ovale ?... Ce ne fut pas suffisant pour le convaincre et il a fallu que je lui donne la définition d'une perspective axonométrique pour qu'il accepte ma modélisation par l'ombre du ballon comme un argument définitif validant la représentation rétro projetée. Ce fut, entre autres, le point de départ de mon travail sur ces représentations à l'aide du logiciel Cabri 2 Plus. La raison profonde de la croyance de ce jeune professeur en la matière est vraisemblablement à chercher dans les manuels scolaires où, au milieu de représentations de cubes ou de pavés en perspectives cavalières, se glissent des représentations de sphères par un cercle représentant le contour apparent et une ellipse tangente intérieurement à ce cercle pour représenter le cercle équatorial. J'ai déjà eu l'occasion de montrer il y a une dizaine d'années (au cours d'une conférence donnée dans une école européenne de Bruxelles) que de telles représentations ne pouvaient être des représentations en perspective cavalières car l'ellipse représentant le cercle équatorial déborde le cercle utilisé pour représenter le contour.
Ayant encore rencontré au cours de cette dernière année des enseignants pour qui ces notions restaient ésotériques, j'ai réalisé les deux vidéos qui suivent, modélisant d'abord la représentation en perspective cavalière d'une sphère et ensuite comment on peut essayer de se rapprocher de la représentation des manuels à partir de la bonne représentation en perspective cavalière. Elles sont consultables aux adresses respectives

http://youtu.be/Tcxk5B1E49s et http://youtu.be/ks0RKvyley4 .

Vous pouvez aussi les visualiser en double cliquant sur les vignettes ci-dessous :



Vidéo **Sphere_perspective_cavaliere**



Vidéo **Perspectives_cavaliere_et_militaire**

(double clic sur l'image pour démarrer la vidéo)

Ces vidéos ont été réalisées avec les fichiers,
Sphere_perspective_cavaliere.cg3 et **Sphere_perspective_cavaliere_livre.cg3**

Elles détaillent encore et toujours des investigations génératives dans un cadre de modélisation. Elles ont comme but essentiel de proposer une modélisation de la représentation en perspective cavalière de la sphère avec Cabri 3D s'appuyant sur l'ombre au soleil de cet objet. Le nombre de vues correspondant à ces vidéos sur ma chaîne YouTube est un bon marqueur du besoin d'information et de formation sur ce sujet à la condition que l'information soit attractive : le rôle de la dynamicité et des couleurs permet d'aller dans ce sens.

5. Un premier bilan sur la trilogie Investigation-Technologie-Vidéos

Nous avons vu comment l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique pouvait changer notre approche expérimentale d'un problème, c'est-à-dire les actions que l'on pouvait initier pour avancer vers la résolution de ce problème.
Ces actions qu'on peut mener sont des expérimentations (réalisation d'une expérience), des processus qui génèrent des données dont on espère que l'interprétation va nous permettre d'induire une conjecture concernant le problème à traiter. Dans ce cas, les expérimentations sont qualifiées de génératives.
Si l'interprétation des données a pour but de corroborer une conjecture déjà émise, on parlera d'expérimentations validatives. Cette corroboration consiste en la vérification de conditions nécessaires impliquées par la conjecture. Notons que, s'il n'y a pas vérification, la conjecture est en principe rejetée dans le cadre de ce type d'expérimentation.
Comment avoir l'idée d'une expérience pour nous venir en aide dans la résolution de problème assisté par la technologie (ici par Cabri 2 Plus ou Cabri 3D) ?
La connaissance et la mise en œuvre de techniques est absolument fondamental. Lorsqu'on met en place une expérience s'appuyant sur des techniques bien repérées comme cela a été montré dans le cas des problèmes de recherches des formules donnant les volumes de sphère et dodécaèdre, on parle **d'investigation**.
Le rôle des vidéos est de montrer à travers les exemples qu'elles traitent, des techniques simples qui doivent faire partie du bagage du chercheur en herbe. Elles donnent du sens aux processus de génération ou de validation de conjectures. Elles essaient de bien distinguer ces deux types d'expérimentations qui s'entremêlent souvent dans les démarches qu'on observe *de visu* ou dans les narrations de recherche par exemple.
Je rappelle, qu'après tant d'années, où j'ai assuré tant de formations d'enseignants sur l'utilisation des technologies en classe, mon souci essentiel a été de trouver le moyen de transmettre mon expertise, non pas sur la technologie mais sur son utilisation

pertinente. Comment donner aux enseignants le recul sur une démarche qualifiée d'investigation ? Ma réponse après bien des tâtonnements, des essais, des propositions qui se sont affinées, et à ce stade de ma réflexion, consiste à mettre à disposition, des vidéos comme celles présentées ci-dessus.

Tout cela pour dire que mon interlocuteur premier est l'enseignant qui doit recevoir la plus grande information possible sur la pratique de la démarche expérimentale médiée par la technologie.

Le format vidéo permet d'allier la voix et l'image dans un temps limité : il resserre le lien brisé par le texte à lire. Les exemples que j'ai présentés ont illustré des démarches où les techniques dépendaient des cadres dans lesquels les investigations étaient menées : les cadres principaux ont été illustrés, les cadres d'ingénierie, de modélisation et scientifique.

Les vidéos que je propose peuvent remplir bien d'autres fonctions que nous allons détailler dans la suite.

6. D'autres vidéos pour d'autres fonctions en liaison avec des démarches d'investigation

6.1. Groupes de vidéos pour scénariser des séquences de cours

Dans le cadre de la convention de recherche entre l'IREM de Toulouse et le collège Anatole France de Casablanca, ma collaboration avec Myriam Bouloc-Rossato et certains de ses collègues, m'a amené à mettre au point des scénarisations de certaines séquences importantes du programme incluant une utilisation de la géométrie dynamique pour développer des démarches expérimentales de découverte. Afin de diffuser le travail que nous avions réalisé, j'ai enregistré pour chaque séquence des séries de vidéos qui sont présentées ci-dessous.

6.1.1. Scénario pour le thème « théorème de Pythagore »

Présentation de la série de vidéos

Ce scénario se résume en une série de 4 vidéos dont les titres suivent avec leurs liens. Notons que cette scénarisation est le fruit d'un travail de plusieurs années avec des reprises, des améliorations résultant d'expérimentations réalisées dans les classes de Myriam Bouloc-Rossato (des scénarios intermédiaires ont d'ailleurs fait l'objet d'un atelier aux Journées de l'APMEP de La Rochelle en 2008).

Decouverte_Pythagore_1 à l'adresse http://youtu.be/11DnEHo9oF4
Decouverte_Pythagore_2 à l'adresse http://youtu.be/rt8jiJPug1w
Decouverte_Pythagore_3 à l'adresse http://youtu.be/mAQfYvDYW2g
Equivalence_de_Pythagore à l'adresse http://youtu.be/xVraGuiyNnk

Contenu des vidéos

- **La première vidéo** montre la première partie de l'activité proposée aux élèves en salle d'informatique. Cette première partie commence par la prise en main de la figure fournie (c'est le montage). On propose aux élèves d'essayer de déplacer tous les points déplaçables et de noter ces points. Ils constateront que les sommets d'un triangle sont ces points là. Ce faisant, ils constateront que les quadrilatères s'appuyant sur chacun des côtés semblent être et rester des carrés ; ils mènent ainsi une expérimentation générative au niveau G1 informatique (où la validation est perceptive sur l'écran de l'ordinateur). Il leur est proposé de survalider cette conjecture avec les outils du logiciel, ce qui revient à leur demander de mener une expérimentation validative au niveau G2 Informatique (c'est à dire à un niveau déductif assisté par le logiciel). Cette expérimentation va consister à vérifier expérimentalement les propriétés caractéristiques d'un carré, c'est-à-dire avec les outils de mesure de Cabri. Notons le travail possible permis par le logiciel sur la plausibilité croissante de la conjecture quand on fait afficher plus de décimales des mesures affichées, en particulier du 90,0° mesurant l'un des angles d'un quadrilatère sensé être un carré.

- **La seconde vidéo** illustre pour commencer, la notion de protocole puisque les élèves doivent exécuter une série d'actions bien précises (afficher 3 mesures d'aires, en additionner deux, en vue de comparer cette somme à la troisième mesure). Ensuite, ils doivent mener une investigation dans la mesure où ils doivent expérimenter en utilisant une technique bien précise : cette technique consiste à déformer le triangle ABC en déplaçant le point A jusqu'à repérer une position où deux des nombres affichées semblent être égaux (somme des aires des carrés s'appuyant sur les côtés issus de A égale à l'aire du carré s'appuyant sur [BC]). Une telle position est repérée par un point confetti qui définit un triangle ABC solution. Plusieurs triangles solutions sont ainsi construits jusqu'à ce que la conjecture émerge (le triangle « doit » être rectangle). Cette investigation est donc menée dans un cadre d'ingénierie itératif et aussi par essai erreur. L'expérimentation qui sous-tend cette investigation est du type génératif.

Il est bien spécifié dans la vidéo que le professeur doit sentir le moment où il doit donner la parole aux différents groupes de chercheurs pour faire émerger la bonne conjecture dans un processus de débat qu'il doit maîtriser.

Ce n'est qu'ensuite qu'il remet ses élèves en activité d'expérimentation validative en leur proposant de valider la conjecture émise par le groupe classe en utilisant les outils de Cabri. On montre les investigations menées par les élèves qui consistent en une expérimentation validative où ils mesurent les angles A des triangles repérés par des confettis. Les mesures obtenues sont proches de 90°. Il est à noter que, bien que n'obtenant pas exactement 90°, les élèves considèrent qu'ils n'invalident pas la conjecture ; ils ont une parfaite conscience de la stabilité des propriétés observées (voir l'article sur « *La stabilité en géométrie* » de Roger Cuppens dans le N° 478 du bulletin vert de l'APMEP). Les élèves font des validations perceptives, justifiant qu'ils se mettent au niveau G1 Informatique. On indique pour finir, une validation possible au niveau G2 Informatique qui consiste à construire deux droites perpendiculaires issues de B et C et redéfinir le point A en le point d'intersection de ces deux droites ; cette redéfinition fait apparaître une égalité parfaite entre les aires comparées (attention, « parfaite » veut dire avec la précision maximum du logiciel). On voit bien ici que si le triangle est rectangle (déclaré tel au logiciel par la propriété de perpendicularité) alors l'égalité des aires s'en déduit. On comprend ainsi que le logiciel déduit bien des conditions géométriques qui lui sont imposées qu'une certaine propriété est vérifiée. C'est la déduction assistée par le logiciel dans tous les cas de figure que l'on peut tester ; nous travaillons au niveau G2 Informatique, dernière étape expérimentale avant le niveau G2, c'est-à-dire la démonstration qui reste à faire.

- **La troisième vidéo** montre comment utiliser un fichier Cabri 2 Plus réalisé pour le professeur afin qu'il puisse montrer à sa classe un condensé de toutes les investigations menées. Un système de boutons **Cacher/Montrer** permet de détailler tout ce qui a été fait sans avoir à faire aucune construction.

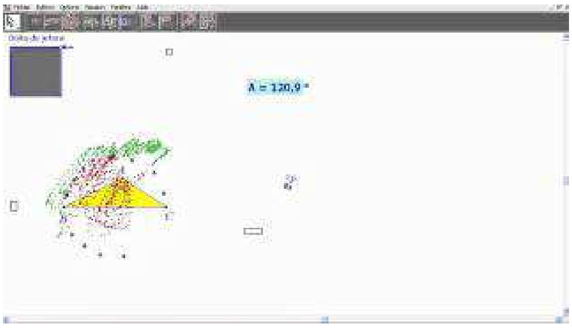
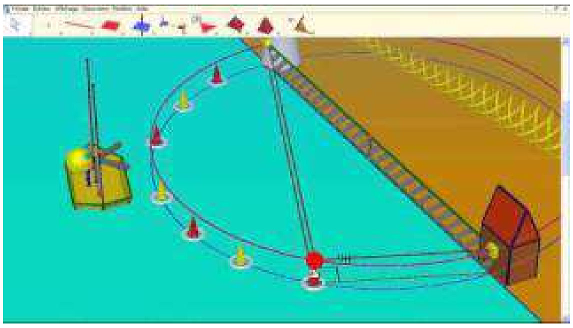
- **La quatrième vidéo** décrit une investigation (utilisant les lieux mous) qui cherche à convaincre les élèves expérimentalement de la véracité de la condition nécessaire et suffisante du théorème de Pythagore. Cette vidéo a été présentée et commentée au paragraphe **3.2.**.

6.1.2. Scénario pour le thème « Triangle rectangle et cercle circonscrit »

Présentation de la série de vidéos

Ce scénario se résume en une série de 6 vidéos dont les titres suivent avec leurs liens. Il a été mis au point avec un collègue qui, préparant son dossier de CAPES interne, voulait développer une analyse de séquence qu'il aurait expérimenté en classe. Nous avons donc mis au point un scénario initial qui a été testé en classe. En fonction des observations que nous avons pu faire, ce scénario a été une première fois modifié avant d'être testé cette fois par Myriam Bouloc-Rossato dans deux de ses classes. Le scénario qui suit est celui auquel nous nous sommes arrêtés après trois séries d'expérimentations en classe

triangle_rectangle_1 à l'adresse http://youtu.be/tCjT-P9VV-A
triangle_rectangle_2 à l'adresse http://youtu.be/x6RsbObY4oc
triangle_rectangle_3 à l'adresse http://youtu.be/96kiN_yJHvk
triangle_rectangle_4 à l'adresse http://youtu.be/rB5AAlcDsCc
triangle_rectangle_5 à l'adresse http://youtu.be/1zTNafk3AHs
triangle_rectangle_6 à l'adresse http://youtu.be/9oskBloT9D8

Vignettes des vidéos **triangle_rectangle_3** et **triangle_rectangle_6**

Contenu des vidéos

- On utilise Cabri 3D dans la **première vidéo** pour introduire notre problème de manière ludique à partir d'un problème de chasse au trésor.
- Sa modélisation est réalisée dans un second fichier Cabri 2 Plus (montré dans la **seconde vidéo**) fourni aux élèves qui exécutent les consignes données. La première de ces consignes est la prise en main de la figure (c'est le montage). La seconde consiste en la réalisation d'une investigation permettant de repérer des points voyant un segment sous un angle de 90°. Cette investigation menée par essai erreur est une investigation dans un cadre d'ingénierie par essai erreur puis par itération. Cette investigation est menée en menant des expérimentations génératives générant la découverte du cercle de diamètre le segment en question. La découverte est validée perceptivement (niveau G1 informatique). On montre comment on peut valider au niveau G2 informatique par une redéfinition sur ce cercle. C'est la technique par essai erreur pour découvrir des positions répondant à la question qui justifie ici le qualificatif d'investigation.
- Dans **la troisième vidéo**, on montre comment le professeur peut réaliser avec son propre fichier le bilan de la recherche menée par les élèves. Il a en prime la possibilité de faire plus d'essais que les élèves par un balayage de l'écran qui laisse des traces de couleurs différentes suivant que le segment est vu de notre point manipulé suivant un angle plus grand ou plus petit que 90° (technique des constructions molles). Cela permet de corroborer la conjecture émise par les élèves. Il finit par un énoncé de la propriété découverte dans un langage compréhensible par les élèves. Ce fichier est donc une première aide à l'institutionnalisation.

- **La quatrième vidéo** permet au professeur de faire énoncer la propriété trouvée sous forme de deux énoncés du type « si…alors ». Un jeu d'animations et de couleurs permet cette aide à une approche plus formelle de telles propriétés.
- La **cinquième vidéo** est la seconde aide à l'institutionnalisation que mène le professeur. C'est une démonstration assistée par Cabri 2 Plus de l'une de deux propriétés précédemment énoncées. Le pas à pas peut permettre au professeur de dérouler le raisonnement déductif par un dialogue avec sa classe.
- **La sixième et dernière vidéo** est un retour au problème initial avec Cabri 3D pour répondre à la question dans l'environnement où elle a été posée. Ceci montre l'un des intérêts de la modélisation qui est de prévoir.

6.2. Vidéos pour illustrer des définitions dynamiquement

6.2.1. Définition du cosinus au niveau collège

Cette vidéo reprend un fichier Cabri professeur avec des boutons **Cacher/Montrer** dont l'objectif est double : faire découvrir de manière expérimentale l'invariant « cosinus » dans un triangle rectangle dynamique puis le prouver déductivement. La partie expérimentale permet de dérouler une investigation permettant d'établir un lien linéaire entre deux séries de données.

Cosinus à l'adresse http://youtu.be/GpdxUh_KpdA

6.2.2. Définition de la mesure d'un angle en radian par enroulement

Cette vidéo illustre grâce à un fichier Cabri 2 Plus comment l'enroulement d'un fil autour d'un cercle unité permet de définir les mesures d'angles en radians.

Enroulement_sur_cercle_trigonométrique à l'adresse http://youtu.be/fMlx9EVQLfE

6.2.3. Définitions des fonctions trigonométriques niveau lycée

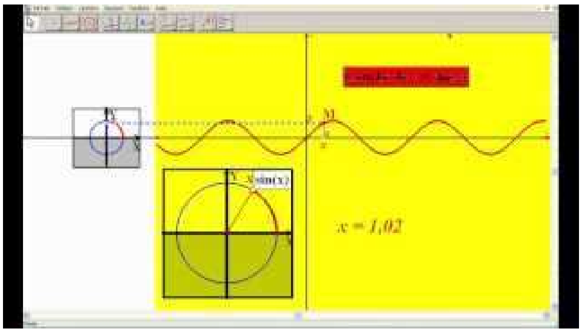
Les fonctions trigonométriques y sont définies par les coordonnées d'un point convenable sur le cercle trigonométrique. Les propriétés immédiates sont dégagées à la fois visuellement et déductivement. L'approche avec le logiciel permet de montrer comment le changement du nombre considéré fait changer la position du point qui définit les sinus et cosinus de ce nombre. La visualisation de cette vidéo par les élèves leur permet une approche dynamique de la définition donc plus riche pour l'appréhension du concept.

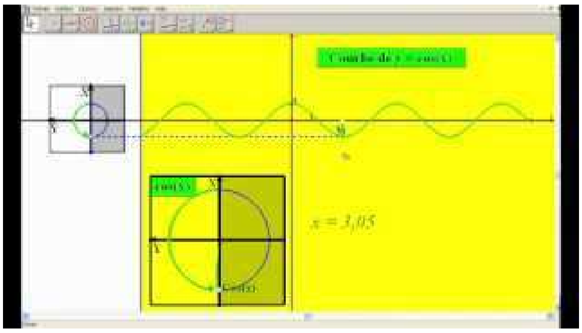
Definitions_sinus_et_cosinus à l'adresse http://youtu.be/EWXOLqBxUO4

Une série de deux autres vidéos permet de construire dynamiquement les courbes représentatives de ces deux fonctions à partir de la définition précédente. On utilise la technique de la monstration (dans le sens donné par Joshua [1]) c'est à dire une expérimentation dont les données produites suffisent à convaincre l'expérimentateur de ce qu'il infère (que Joshua appelle une expérience cruciale).

Courbe_de_la_fonction_sinus à l'adresse http://youtu.be/VvrirM96OWc

Courbe_de_la_fonction_cosinus à l'adresse http://youtu.be/RegH5C31or4





6.3. Vidéos pour scénariser des théorèmes (avec Cabri 2 Plus)

Nous allons présenter deux exemples avec des objectifs qui sont les mêmes, découvrir un théorème mais avec des finalités différentes. Essentiellement, le premier et le troisième permettront la découverte expérimentale d'un théorème alors que le second permettra de découvrir et prouver déductivement un théorème.

6.3.1. Les différentes formes du théorème de Thalès

Ces fichiers Cabri 2 Plus ont été mis au point avec Myriam Bouloc-Rossato et testés dans ses classes. Leur utilisation a été faite par le professeur qui pilotait l'investigation suivie par les élèves sur un tableau blanc interactif. Ces fichiers ont donné lieu à la création des trois vidéos qui suivent :

Pour la classe de quatrième, la découverte expérimentale du théorème de Thalès est illustrée par la vidéo

Thales1_direct-1 à l'adresse http://youtu.be/x9hYBX0UGkI

Pour la classe de troisième, la découverte et la démonstration du théorème de Thalès étendu à deux droites sécantes et la découverte expérimentale de sa réciproque sont illustrées par les vidéos

Thales2_direct à l'adresse http://youtu.be/9SdZvqGLwk0

Thales2_reciproque à l'adresse http://youtu.be/D_3Vm0VZPPQ

6.3.2. Les identités remarquables et leur monstration-démonstration

Les identités remarquables sont abordées géométriquement avec Cabri 2 Plus pour en dégager leurs formes algébriques (formes sous lesquelles elles doivent être connues). Le travail présenté est un **travail de monstration** qui est en même temps un **travail de démonstration**. Le professeur peut s'en servir pour faire trouver ou retrouver ces identités. Elles ont d'ailleurs été utilisées en classe avec ces deux options. Le professeur a ensuite fourni les adresses de ces vidéos à ses élèves pour qu'ils puissent les revoir à loisir. Ceci permet aux élèves de bien s'imprégner de la technique qui consiste à interpréter le découpage d'un rectangle comme une égalité algébrique. Ces vidéos sont listées ci-dessous avec leurs liens :

Identite_troisieme_1 à l'adresse http://youtu.be/EsZe7l39NVQ

Identite_troisieme_2 à l'adresse http://youtu.be/EolrDArDECs

Identite_troisieme_3 à l'adresse http://youtu.be/HJFck1GiQeI

6.3.3. Découverte expérimentale des dérivées des fonctions trigonométriques

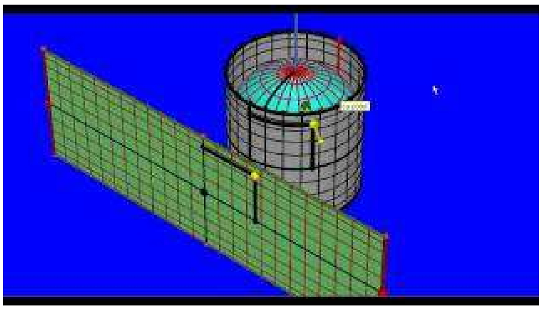
Afin de faire découvrir les dérivées des fonctions trigonométriques sinus et cosinus, Myriam Bouloc-Rossato, m'a demandé de lui créer deux scénarios qui en permettent une découverte facile et rapide. L'investigation proposée permet d'utiliser la définition locale de la dérivée (tangente à la courbe) pour générer la reconnaissance globale de la dérivée (reconnaissance de la fonction dérivée par la reconnaissance d'une courbe connue). Cette technique est celle qui peut aussi être utilisée pour découvrir les formules donnant les dérivées des fonctions puissances (fait dans une autre vidéo). La scénarisation proposée l'est grâce aux deux vidéos qui suivent

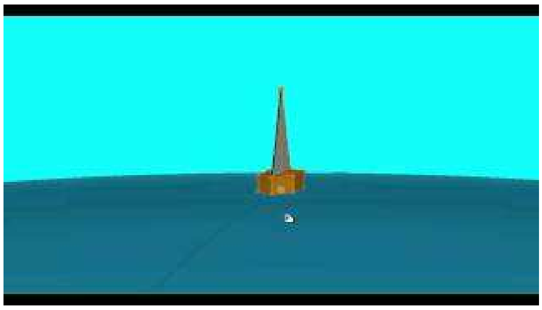
Derivation_experimentale_de_sinus à l'adresse http://youtu.be/QLnF1radmqc

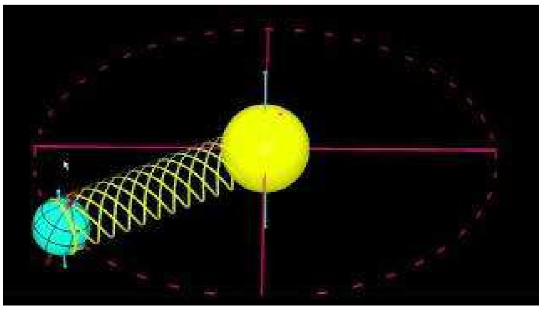
Derivation_experimentale_de_cosinus à l'adresse http://youtu.be/qxSItgNUTaM

L'avantage de l'utilisation de ces vidéos est que le montage est fourni et que l'activité peut se concentrer sur l'expérimentation générative qui est le cœur de l'investigation mise en place.

6.4. Vidéos pour modéliser des phénomènes physiques (interdisciplinarité)







Ces vidéos ont fait l'objet d'un long article dans la rubrique « Mathématiques en environnement Multimédia » de Gérard Kuntz dans le bulletin vert N° 502 de l'APMEP (pages 96, 97 et 98). On y découvre que ce travail est le point d'orgue d'une collaboration avec un professeur de Géographie du collège Anatole France de Casablanca, Denis Baud. Celui-ci en me voyant travailler sur mon ordinateur avec Cabri 3D et Cabri 2 Plus, a tout de suite compris ce qu'il pourrait obtenir de mon expertise pour aborder les problèmes de cartographie qu'il devait évoquer en cours d'histoire. Je suis donc intervenu plusieurs fois dans ses classes de sixième et de cinquième pour illustrer dynamiquement et ludiquement la représentation de Mercator avec des fichiers Cabri 3D que j'avais préalablement créés. Devant l'intérêt des élèves face à une telle approche, j'ai retravaillé mes fichiers afin d'en faire des vidéos attractives. D'autres points en rapport avec la terre, le soleil, les saisons… ont ensuite été abordés, qui m'ont donné l'occasion de créer finalement une série de 12 vidéos dont les noms et les liens suivent. Notons que ces vidéos ont reçu une appréciation très positive de la part d'Etienne Ghys (auteur du film « Dimensions » http://www.dimensions-math.org).

1. Illustration animée du mouvement de la terre autour du soleil, de sa rotation autour d'elle-même et autour d'un axe incliné par rapport au plan de l'écliptique justifiant les saisons.

MVT_TERRE_AUTOUR_SOLEIL à l'adresse http://youtu.be/0klefjnGuCo

2. Justification expérimentale de la courbure de la terre par observation d'un voilier s'éloignant à l'horizon

COURBURE_TERRE à l'adresse http://youtu.be/BP0aqP3-OIo

3. Fichier Cabri 2 Plus illustrant les dimensions relatives de la terre et du soleil ainsi que leur distance

Terre_soleil_dimensions_distance à l'adresse http://youtu.be/wRus7fRJ4WU

4. Fichier en 3D illustrant de manière animée pourquoi en été ((pour l'hémisphère nord), les zones proches du pôle nord sont éclairées 24 heures sur 24

Jour_polaire à l'adresse http://youtu.be/hB3TVdFyflc

5. Fichier en 3D illustrant de manière animée pourquoi en hiver ((pour l'hémisphère nord), les zones proches du pôle nord sont dans la nuit 24 heures sur 24

nuit_polaire à l'adresse http://youtu.be/vNFxHmlKHFg

6. Brève vidéo en 3D montrant la taille de la terre par rapport à celle du soleil

Terre_soleil_dim à l'adresse http://youtu.be/v6k2uLKadfc

7. Vidéo montrant pourquoi, le jour dure plus longtemps à Casablanca qu'à Londres qui est plus au nord

jour_nuit_Londres_Casa à l'adresse http://youtu.be/GtCMsMiaoNw

8. Description du principe de la représentation cartographique de Mercator de manière ludique. Notons qu'en réalité, ce n'est qu'une approche de la représentation de Mercator (qui doit conserver les distances…). Notre représentation est en réalité la représentation d'Archimède (remarque d'Etienne Ghys).

Mercator_méridiens_paralleles à l'adresse http://youtu.be/qplYiZSWqEs

9. Visualisation simultanée du tracé des frontières d'un pays sur le globe terrestre générant le tracé de sa représentation de Mercator

Mercator_représentations_pays à l'adresse http://youtu.be/rgxD-C2YS4k

10. Visualisation du phénomène de discontinuité dans la représentation de Mercator

Mercator_discontinuité_représentation à l'adresse http://youtu.be/qYXnswhyCmc

11. Latitude et longitude sont illustrées par le tracé simultané des demi-méridiens et des parallèles sur le globe terrestre et sa représentation de Mercator

Mercator_longitude_latitude à l'adresse http://youtu.be/76AoNba15os

12. On illustre de manière expérimentale la déformation de certains pays dans leur représentation de Mercator en raison de leur proximité des pôles

Mercator_Groenland_autres à l'adresse http://youtu.be/fe85KY_h4cc

Dernière remarque : l'ensemble de ces vidéos a été vu environ 6000 fois depuis leurs créations, soit environ le quart des vues de la chaîne. Ceci montre l'importance de la coopération avec d'autres disciplines pour mettre au point des activités d'investigation. Ces investigations peuvent mobiliser des expérimentations génératives pour faire découvrir des phénomènes (longueur du jour suivant la latitude par exemple) ou des expérimentations validatives pour vérifier des lois connues (phénomène des saisons par exemple).

6.5. Vidéos d'information théoriques et pratiques (vidéos de PowerPoints)

6.5.1. Pour une information théorique sur la démarche expérimentale

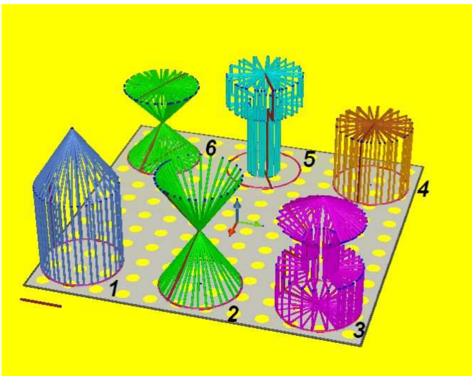
Une information théorique un peu plus approfondie que cet article a été donnée au cours de la présentation que j'ai faite au cours de la réunion de la C2I lycée qui a eu lieu à l'IREM de Toulouse en Juin 2012. Cette présentation portait sur la démarche d'investigation en lycée d'où certains des exemples présentés ont été repris. J'ai enregistré le Powerpoint de cette présentation en format vidéo avec les commentaires originaux sur ma chaîne YouTube. L'intégralité de la présentation est disponible dans les 7 vidéos qui suivent.

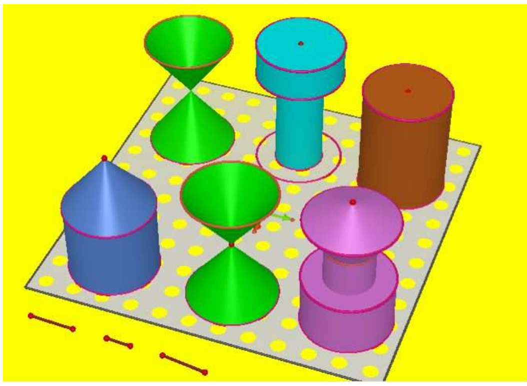
Conference_JJ_DAHAN_C2I_LYCEE_PARTIE_1 à l'adresse http://youtu.be/m2gip0KCqBU
Conference_JJ_DAHAN_C2I_LYCEE_PARTIE_2 à l'adresse http://youtu.be/KkqR6CV81Ws

Conference_JJ_DAHAN_C2I_LYCEE_PARTIE_3 à l'adresse http://youtu.be/bMNsAapZsCA
Conference_JJ_DAHAN_C2I_LYCEE_PARTIE_4 à l'adresse http://youtu.be/A2L1hPbFrlA
Conference_JJ_DAHAN_C2I_LYCEE_PARTIE_5 à l'adresse http://youtu.be/FR9cb5-pVnA
Conference_JJ_DAHAN_C2I_LYCEE_PARTIE_6 à l'adresse http://youtu.be/6vIOy-0O9SU
Conference_JJ_DAHAN_C2I_LYCEE_PARTIE_7 à l'adresse http://youtu.be/XK0dWSO6Gb0
Pour ceux qui seraient intéressés par un document écrit, je leur recommande l'article que j'ai écrit pour le colloque de Rethymnon en Crête ([8]).

6.5.2. Pour montrer des approches différentes permises par la technologie

Pendant la durée de deux années scolaires, nous avons mis au point puis testé avec Myriam Bouloc-Rossato, en classe, des activités s'appuyant sur les possibilités offertes par la géométrie dynamique (Cabri 2 Plus et surtout Cabri 3D) pour traiter tous les problèmes de sections de solides au programme du collège. A la fin de ce travail, nous en avons fait un résumé aux journées nationales de l'APMEP de Grenoble. Le Powerpoint présenté a été enregistré avec les commentaires originaux et posté sur YouTube sous le nom **SECTIONS_SOLIDES_COLLEGE** à l'adresse http://youtu.be/Pxd6ClMATpU
On peut y découvrir en une quinzaine de minutes la manière avec laquelle nous avons pu abordé ce thème en inversant les pratiques habituelles.
En particulier, au lieu de commencer par définir les solides pour étudier ensuite leurs découpes possibles, nous avons choisi de générer les solides par animation de leurs sections pour les reconstituer (comme dans les deux figures qui suivent). Mieux qu'un article papier, une telle vidéo participe à la diffusion de pratiques innovantes permises par une connaissance experte d'un logiciel comme Cabri 2 Plus. Notons en particulier que l'investigation que nous venons d'évoquer a donné lieu à des va et vient entre l'environnement informatique et l'environnement papier crayon.





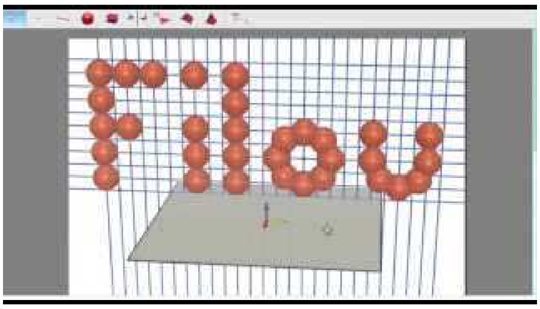
6.6. Vidéos pour accompagner des activités d'ateliers de géométrie dynamique

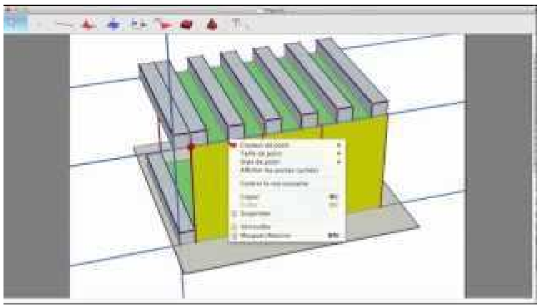
Dans le cadre de la convention citée plus haut, Myriam Bouloc-Rossato a pu mettre en place au lycée Lyautey de Casablanca, un atelier de géométrie dynamique 3D que nous animons ensemble. Dans un premier temps, pour faire connaître l'existence de cet atelier, j'ai réalisé trois vidéos pour montrer les possibilités d'animation (avec le logiciel Cabri 3D que le collège a acquis entre temps). Ces vidéos ont été mises en ligne sur le site du Lycée. Voici ces vidéos :

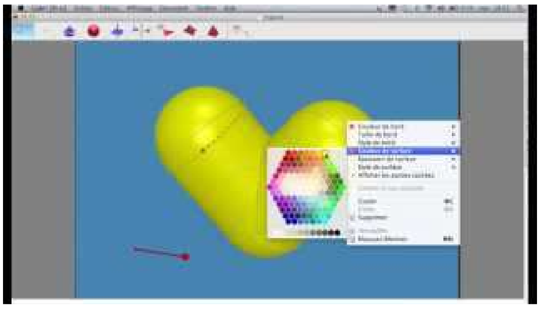
Claude_en_manege.m4v à l'adresse http://youtu.be/mNS06owremI
Swinging_Claude.m4v à l'adresse http://youtu.be/-boq9YZoRj0
1=2=3.m4v à l'adresse http://youtu.be/N86E0yett6g

Une fois l'atelier en route, les vidéos détaillant le pas à pas des techniques enseignées à chaque séance ont été mises en ligne immédiatement (après chaque séance).

Voici quelques exemples des vignettes de ces vidéos telles qu'elles apparaissent sur YouTube







Et voici toutes les vidéos publiées à ce jour

- **Initiation_Cabri_3D_bouliers** à l'adresse http://youtu.be/MOWE8qP6kls
- **petite_maison_3D** à l'adresse http://youtu.be/hX45Hnz3_Ac
- **Initiation_Cabri_3D_manege_1** à l'adresse http://youtu.be/XHEjQUZ5ips
- **Filou** à l'adresse http://youtu.be/7H8LItaMw7s
- **LETTRE_R** à l'adresse http://youtu.be/tb8S3zv52fY
- **Filou_avec_spheres** à l'adresse http://youtu.be/J6U8bUAs3RY
- **INITIATION_CABRI_3D_LETTRE_V** à l'adresse http://youtu.be/zgECqeAdhNg
- **Initiation_Cabri_3D_Chewing_gum** à l'adresse http://youtu.be/mFZ7z3h57qM

Cette mise à disposition en ligne a permis aux élèves de l'atelier de reprendre chez eux les techniques que nous leur avons apprises. Cela permettait aux élèves absents de se tenir au courant du travail qu'ils avaient pu manquer. Cela constitue aussi une excellente initiation à l'utilisation de ce logiciel pour aborder de manière ludique la géométrie dans l'espace. Les deux objectifs que nous visons avec cet atelier sont les suivants :
1. Enseigner des techniques de base pour créer des animations : ces techniques mobilisent des connaissances mathématiques qui le sont sans qu'on ait à les enseigner. Par exemple, la modélisation de l'ouverture d'une porte nécessite l'utilisation de l'outil rotation dans l'espace que nous avons utilisé sans le définir. Son utilisation participe à la compréhension du concept.
2. Laisser libre cours à l'imagination créative des élèves et continuer à diffuser des techniques à la demande.
Nous avions déjà fixé ces deux objectifs à l'atelier de géométrie dynamique 2D (utilisant Cabri 2 Plus) que nous avions piloté pendant 3 ans au collège Anatole France. La partie créatrice des élèves est apparue très rapidement après que nous leur ayons présenté un minimum de techniques. A la fin de chaque année, Myriam Bouloc-Rossato a réalisé un petit film en mettant bout à bout les animations réalisées par les élèves du club. Nous comptons faire cela cette année avec l'atelier 3D et nous mettrons en ligne les

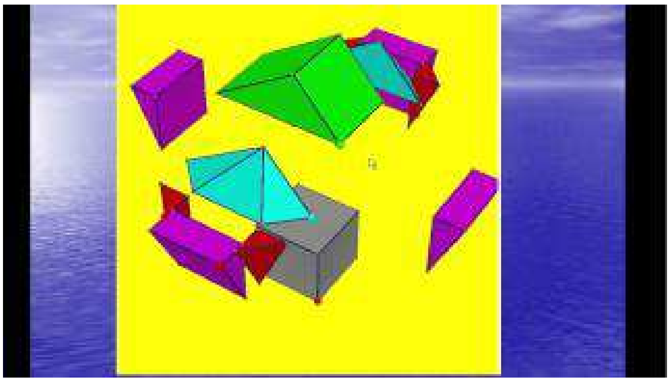
réalisations des élèves comme le film posté sur YouTube par notre collègue italienne **Carla Palmieri** (où les élèves utilisaient seulement Cabri 2 Plus). Je vous conseille d'aller voir cette remarquable vidéo « **The wonderful World of Cabri - Le fabuleux monde de Cabri** » à l'adresse http://www.youtube.com/watch?v=Dfy0KPGoqfE.
Cette manière de travailler nous a été inspiré par le travail réalisé par Kate Mackrell (de la Queen's University de Kingston) qui a montré après une expérience faite avec deux classes au Canada qu'une utilisation créatrive de Cabri 3D par les élèves nécessitait une initiation préalable de quelques techniques de base comme celle citée plus haut concernant la modélisation de l'ouverture d'une porte ([7]). Les élèves entrent ainsi plus facilement dans le monde des figures, évitant autant que faire se peut, le monde plus statique du dessin.

6.7. Vidéos de conférences concernant des articles décrivant des découvertes expérimentales

Depuis que j'utilise les environnements de géométrie dynamique Cabri, j'ai eu très souvent l'occasion de créer, soit pour moi-même, soit pour des stagiaires IUFM qui me les réclamaient, soit pour des collègues, des scénarios de séquences intégrant des parties expérimentales mobilisant l'utilisation de la géométrie dynamique. Plusieurs fois j'ai été amené à créer des fichiers Cabri relativement classiques sur lesquels je me suis laissé aller à modifier des paramètres, par curiosité intellectuelle ou tout simplement par la curiosité naturelle du chercheur qui a horreur des cas particuliers et qui va toujours chercher plus loin que le bout de son nez. Ce qu'il y a de surprenant, c'est que plusieurs fois, ces investigations qui partaient d'une situation archi-connue m'ont amené à des découvertes inattendues. Je dois reconnaître qu'assez souvent, ces découvertes ne furent que des redécouvertes de théorèmes déjà connus mais quelle satisfaction de voir que la médiation experte par Cabri m'avait permis d'égaler même très fugacement Chasles ([3]) !
Je ne rentrerai pas dans le détail de ces découvertes faites avec Cabri 2 Plus. Je préfère m'attarder sur d'autres découvertes plus originales permises par Cabri 3D. Les deux résultats que je vais vous présenter ont fait l'objet d'articles présentés aux cours des conférences ATCM de 2007 à Taipei (Taïwan) et 2012 à Bangkok (Thaïlande).

6.7.1. Théorème du 4014

La possibilité de réaliser des patrons de polyèdres convexes dans Cabri 3D fait que je me suis intéressé à l'enveloppe convexe du patron plié d'un cube ? En réalité je désirais savoir quand le volume de cette enveloppe convexe était maximum. J'ai donc fait une investigation expérimentale avec Cabri 3D qui m'a fait rechercher le maximum du rapport des volumes de l'enveloppe convexe et du cube initial. Le paramétrage choisi fut l'angle entre le plan horizontal et une face latérale, exprimé en degrés sexagésimaux. L'originalité de cette recherche est qu'elle a conduit à un rapport maximum de 4.014 pour un angle de 40,14° en excluant les décimales supplémentaires. Cette précision a pu être atteinte expérimentalement avec Cabri 3D et a pu laissé croire en une relation linéaire du simple au décuple entre ces deux expressions. La démonstration utilisant des fonctions trigonométriques donne seulement la décimale suivante commune (4.0141 pour 40.141°). Ce travail a été présenté au congrès ATCM 2007 ([5])
Cette recherche a été résumée dans la vidéo précédemment référencée :
Conference_JJ_DAHAN_C2I_LYCEE_PARTIE_5 à l'adresse http://youtu.be/FR9cb5-pVnA



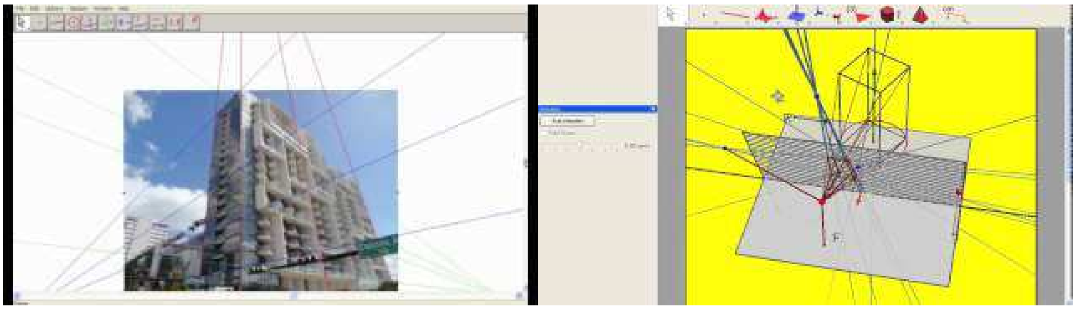
Ce type de vidéo montre comment la technologie, ici Cabri 3D et le calcul formel de la Voyage 200 peuvent inspirer et aider un chercheur dans ses investigations. Noter que la technique d'investigation utilisée ici est très élémentaire : elle est du même type que celle mobilisée pour les investigations menées pour découvrir les volumes de la sphère et du dodécaèdre. Une telle vidéo peut donc montrer aux élèves qu'une recherche peut démarrer simplement, avec des idées simples mais surtout des techniques qui enrichissent les investigations nécessaires (mais pas toujours suffisantes) à la découverte.
Dernière remarque : cette investigation n'est que la première d'une série d'investigations sur une recherche qui est toujours en cours et qui doit mener à une mise en évidence d'invariants dans des problèmes du type de celui présenté.

6.7.2. Théorème de Guidobaldo Del Monte et ses généralisations

Quelquefois les thèmes de recherche peuvent être le fruit du « hasard et de la nécessité ». Ce fut le cas de celui-ci. Après le travail sur la géographie initié par un collègue de collège, j'ai été sollicité par ce même collègue Denis Baud et sa femme Katia Baud (enseignant elle les Lettres) pour préparer leurs élèves à un concours de photographies dont le thème était « Mathématiques dans la ville ». Ces deux collègues désiraient que je sensibilise leurs élèves à la perspective avant qu'ils ne se jettent dans l'aventure photographique. Spécialiste des perspectives axonométriques avec Cabri 2 Plus, j'avais assez de fichiers pour leur faire comprendre le principe de la perspective cavalière. Mais, ne m'étant jamais spécialement intéressé à la perspective centrale, il a fallu que je me documente sur ce type de représentation avec leurs points de fuite. J'ai pu très rapidement, à partir de photos, faire découvrir aux élèves l'existence de ces points de fuite qui dépendaient de l'orientation de l'appareil photo. A ce stade, j'ai pu faire mes interventions mais ma curiosité était éveillée. Je désirais savoir où étaient ces points de fuite par rapport à l'opérateur, l'appareil photo, l'objet à photographier. Ne trouvant pas de résultat mathématique correspondant à mes objectifs dans les livres sur la perspective ou les livres d'architecture, j'ai démarré ma recherche avec Cabri 3D qui a abouti très rapidement à la découverte du théorème fondamental régissant les points de fuite de la perspective centrale (ce que l'on voit ou ce qui est vu par une caméra). J'ai donc publié cette recherche et ce n'est qu'après publication que j'ai découvert une référence mathématique aux points de fuite de la perspective centrale des peintres dans un livre remarquable écrit par une chercheuse danoise en histoire des mathématiques, Kirsti Andersen ([6]). Le théorème que j'avais découvert avait été mis en évidence bien avant moi, en 1600 par Guidobaldo Del Monte mais pas explicitement dans le cas général où je l'ai traité. Notons que ma démonstration ne prend que 3 lignes alors que le travail de Guidobaldo Del Monte s'étale sur 6 livres où il multiplie les études de cas

particuliers et les méthodes. L'intérêt de ma recherche, c'est la recherche elle-même, comment le théorème a été découvert et comment cette découverte peut faire l'objet d'une activité pour nos élèves dans le cadre d'un travail sur la géométrie de l'espace avec un logiciel comme Cabri 3D.
Cette recherche a été présentée au congrès ATCM 2012 ([9]).Dans un très proche futur, j'enregistrerai une série de vidéos en anglais qui reprendront ma présentation en totalité comme je l'ai fait pour la conférence donnée à l'IREM de Toulouse à l'initiative de la C2I lycée.
En plus de cette présentation, j'ai animé au cours de cette même conférence, avec Jean-Marie Laborde, un atelier au cours duquel nous avons fait redécouvrir ce théorème avec Cabri 3D. La redécouverte menée au cours de cet atelier est décrite dans une série de 6 vidéos en anglais, référencées ci-dessous

Workshop_ATCM_Dahan_Laborde_0.m4v à l'adresse http://youtu.be/VU_XQ_wpjM8
Workshop_ATCM_Dahan_Laborde_1.m4v à l'adresse http://youtu.be/Ftqfpph_GGs
Workshop_ATCM_Dahan_Laborde_2.m4v à l'adresse http://youtu.be/iBsQ3pTNI7c
Workshop_ATCM_Dahan_Laborde_3.m4v à l'adresse http://youtu.be/iL4MHsuExrM
Workshop_ATCM_Dahan_Laborde_4.m4v à l'adresse http://youtu.be/Fx6rKmjioHk



L'intérêt de ces vidéos est de donner accès à nos élèves au monde de la recherche où les investigations sont faciles à comprendre et à suivre même si ici, les commentaires oraux sont en anglais, langue de la recherche. Les expérimentations génératives et validatives y apparaissent très clairement. Les amateurs de perspective, en particulier les photographes, trouveront une justification enfin disponible dans le langage d'aujourd'hui de l'existence de ces points de fuite.

7. Conclusions

7.1. Décomposition formelle d'une démarche de découverte expérimentale médiée par la technologie ([4])

Nous n'avons pas évoqué la manière dont la démarche de découverte se déroule idéalement suivant le modèle que j'ai mis en évidence dans ma thèse. Nous devons le faire brièvement pour voir si la démarche d'investigation si abondamment illustrée par les vidéos présentées, suit ce modèle.
En quelques mots, cette démarche se décompose comme suit :

Trois phases pré conjecture

La phase de recherche erratique
La phase de recherche ordonnée
La phase d'accélération de la recherche qui mène à

Une phase de conjecture

Deux phases post conjecture
La phase de validation à un premier niveau (G1 Informatique en géométrie)
La phase de validation à un second niveau (G2 Informatique en géométrie)

En une phase de conclusion provisoire
Énoncé d'une conjecture fortement plausible

Cette conclusion doit être l'ouverture vers une phase de doute qui doit mener à d'autres tentatives de validations expérimentales tant qu'une preuve déductive ne vient mettre un point d'orgue final à la démarche.

7.2. Vers une décomposition formelle de la démarche d'investigation

La phase de **recherche erratique** étant une phase d'expérimentation générant des données que l'expérimentateur n'arrive pas à interpréter, **ne peut être** une phase de la **démarche d'investigation**. Cette phase serait plus typiquement une phase d'exploration, c'est-à-dire une phase où on se familiarise avec le problème plus qu'on ne le recherche.
La phase de **recherche ordonnée** étant une phase où l'expérimentateur se focalise sur une situation particulière, un sous problème particulier, cette phase **peut donner lieu à une investigation** si l'expérimentateur avance dans cette phase en s'aidant de techniques reconnues. C'est une phase critique où l'on sent l'aptitude à la recherche se montrer car les expérimentations menées sont génératives et donc mobilisent l'intuition du chercheur pour la découverte.
La **phase d'accélération de la recherche** étant la phase où une conjecture fortement convaincante (très plausible) apparaît et où l'expérimentateur tente de manière brouillonne de la valider, c'est une phase **typiquement d'investigation**. En effet, chaque vérification met en jeu une technique spécifique même si elle est simple et menée sans beaucoup d'application grâce à des expérimentations validatives.
Après l'émission de la conjecture
Les **phases de validations** au niveau perceptif ou au niveau déductif du logiciel sont encore des phases **fortement investigatives** car associées à des techniques utilisées pour mener des expérimentations exclusivement validatives. Cette phase qu'on appelle en sciences expérimentales la preuve expérimentale peut mener soit à la corroboration de la conjecture soit à son rejet. En mathématiques, cette corroboration doit mener quand cela est possible à la démarche de démonstration.

7.3. Types d'investigations présentées dans les vidéos

Les vidéos mises en ligne qui décrivent une démarche d'investigation ont été choisies pour leur fort pouvoir monstratif, c'est à dire à leur fort pouvoir informatif. N'oublions pas que le public visé est en priorité un public d'enseignants même si de manière corrélative, j'espère une utilisation de ces vidéos pour aider ceux-ci à mener avec leurs élèves les investigations décrites.
Ces investigations sont assez souvent bâties suivant le même schéma, par souci de simplicité et d'exemplification :
- On entre rapidement dans la phase de recherche ordonnée car d'une certaine manière, comme le montage est donnée et que les données à générer sont choisies, la technique à utiliser s'impose ou du moins j'espère qu'elle finira par s'imposer. On y mène des

expérimentations génératives qui permettent de dégager une conjecture assez rapidement.
- Ensuite, on entre dans les phases de validations (de vérifications de conditions nécessaires impliquées par la conjecture émise) en menant des expérimentations validatives qui sont pratiquement toujours de type investigatif.
Il n'a jamais été question de décrire une vraie recherche avec toutes ses phases successives, qui ne déroule pas les phases décrites plus haut dans l'ordre idéal proposé. Une vraie recherche est une sorte de patchwork des phases décrites avec des aller retours, des répétitions…

7.4. Bilan final sur les fonctions affectées aux vidéos que je mets en ligne

Après ce long exposé, il ressort que j'affecte à toutes ces vidéos une fonction de formation en direction de nos collègues qui sont submergés de responsabilités nouvelles sur des compétences qu'ils n'ont jamais acquises durant leur cursus universitaire. La formation continue étant en train de mourir dans notre pays, on voit mal comment ils peuvent se recycler. C'est pourquoi, j'estime que, mettre à disposition du plus grand nombre, le fruit de mon expertise et les résultats de toutes les recherches menées avec les professeurs du terrain grâce à des conventions initiées par l'IREM de Toulouse, fait partie de mon devoir IREMien de formateur aussi bien que de chercheur.
J'ai montré toute une série de fonctions de mes vidéos ; la liste ne se veut pas exhaustive mais au contraire, elle se veut un point de départ pour des recherches ultérieures sur une classification de ces fonctions. Ceci permettrait aux futurs auteurs de vidéos de respecter une sorte de cahier des charges qui permettrait aux utilisateurs de s'y retrouver. Comme je l'ai montré, parmi les fonctions repérées voici celles qui me paraissent essentielles :
- Décrire des situations de cours où le professeur mène ou fait mener des démarches d'investigation pour découvrir ou faire découvrir des théorèmes qui seront éventuellement démontrés (il vaut mieux initier une démarche de découverte expérimentale pour mettre en évidence un résultat qui sera finalement admis que l'admettre *ex abrupto*).
- Bien mettre en évidence les techniques utilisées qui sont la caractéristique de la démarche d'investigation.
- Distiller régulièrement des exemples de rejets de conjecture pourtant rendues fortement plausibles par les expérimentations décrites.
- Décrire grâce à des séries de vidéos, des scénarisations de séquences complètes sur une partie de cours bien précise.
- Mettre en scène, en utilisant la dynamicité de la géométrie dynamique relayée par le format vidéo, des notions difficiles à maîtriser (y compris par le professeur).
- Permettre un suivi en ligne d'activités réalisées en classe surtout si celles-ci ont utilisé des technologies particulières.
- Montrer des investigations à un niveau plus élevé que le niveau collège ou lycée pour démystifier notre discipline qui reste une discipline essentiellement expérimentale même si à un niveau professionnel des connaissances, des savoir faire calculatoires, des méthodes sont indispensables pour pouvoir mener avec succès la phase ultime de toute recherche mathématique qui est la démonstration.

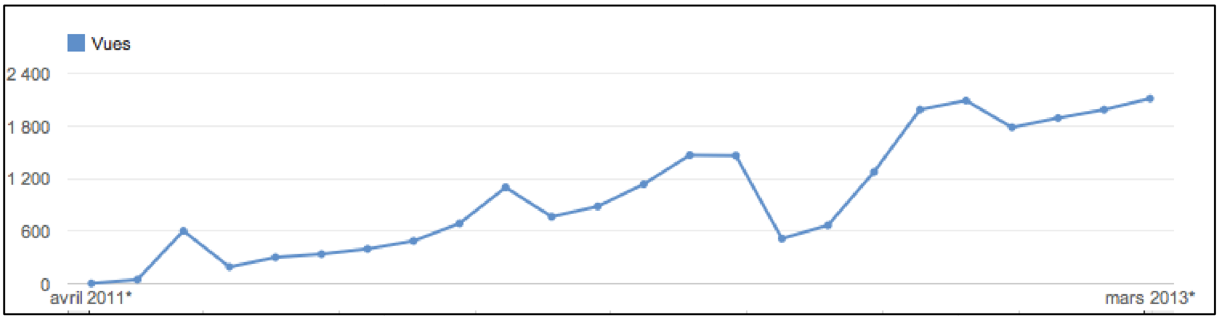
7.5. Remarques finales

J'espère avec cet exposé avoir apporté à la fois
De l'information sur ce qu'est la démarche d'investigation et

Des ressources utiles avec les vidéos présentées

Je voudrais enfin insister sur un point qui me paraît très important, c'est-à-dire le type de travail que j'accomplis depuis des années et qui m'a mené à ces productions. Le travail d'enseignant accouplé à celui de formateur quand il est associé à une expertise dans un domaine technologique, même pointu, peut amener celui-ci à l'occasion d'un simple travail de création pédagogique avec des collègues du terrain à dévier vers une vraie recherche mathématique même si elle n'est pas du niveau de la recherche professionnelle (cela est passionnant et valorisant quand cela arrive). Le fait de travailler à l'IREM, dans ce creuset remarquable, a été plus que le catalyseur de mes succès. Ma collègue de physique, Mathilde Arragon me disait déjà, il y a déjà une quinzaine d'années, que nous étions des **enseignants chercheurs** à cause du profil commun qui nous amenaient à créer du neuf avec l'utilisation des technologies. A l'époque j'avais souri car ce qualificatif me semblait réservé à nos collègues du supérieur. Maintenant je pense qu'elle avait raison et que le **profil** qui m'a permis de faire les recherches que j'ai faites, de produire les ressources que j'ai produites devrait servir de base à un profil de **formateur chercheur producteur de ressources** dont les enseignants ont tant besoin dans ces temps de disette de formation continue.

Enfin une remarque plus pratique :
Toutes les vidéos ont été enregistrées sur mon Mac book pro avec le logiciel QuickTime Player avec lequel elles ont été mises au format MP4 avant d'être enregistrées sur ma chaîne Youtube accessible à l'adresse :
http://www.youtube.com/user/jjdahan24071946?blend=1&ob=video-mustangbase
Voici à titre d'information, l'évolution du nombre de vues par mois depuis la création de la chaîne



(statistiques fournies par YouTube)

Bibliographie

[1] Johsua M.A., Johsua S., 1987, *Les fonctions didactiques de l'expérimental dans l'enseignement scientifique (première partie)*, in Recherches en didactique des mathématiques, 8, (3), 231-266, La Pensée sauvage éditions.
[2] Millar R., 1996, *Investigation des élèves en science: une approche fondée sur la connaissance*, in Didaskalia N°9, editions INRP, Lyon, France
[3] Dahan J.J., 1998, *What Filou has behind his head or stories about parabolas, in* The Derive-Newsletter N° 34, *The bulletin of the Derive user group + TI92*, Vienna
[4] Dahan J.J., 2005, La démarche de découverte expérimentalement médiée par Cabri-géomètre en mathématiques. Un essai de formalisation à partir de l'analyse de démarches de résolutions de problème de boîtes noires, thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble. http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00356107/fr/

[5] Dahan J.J., 2007, *Two explorations with Cabri 3D leading to two theorems : The maximum of the volume of the convex envelope of a net of a cube. Quasi-tessellations of a cylinder with isosceles triangles (linked to the Schwarz paradox),* in Proceedings ATCM 2007 Taipei, Taïwan.
http://atcm.mathandtech.org/EP2007/Contributed_Papers/Math_Research_Combine.pdf (pages 50 à 52)
[6] Andersen K., 2007, *The Geometry of an Art, The History of the Mathematical Theory of Perspective from Alberti to Monge*, Springer, New York.
[7] Mackrell K., 2007, *Cabri 3d: An Environment for Purposeful Mathematical Activity?*, in Proceedings Rencontre annuelle du Groupe Canadien de Mathématiques
http://publish.edu.uwo.ca/cmesg/pdf/cmesg2007.pdf
[8] Dahan J.J., 2008, *Les paramètres didactiques cruciaux pour comprendre l'intégration de l'expérimental dans la pratique et l'enseignement de la géométrie. Exemplification grâce à Cabri 2 Plus et Cabri 3D,* in proceedings of 5th International Colloquium on the Didactics of Mathematics, University of Crete, Rethymnon.
[9] Dahan J.J., 2012, *A didactical transposition of the perspective theorem of Guidobaldo Del Monte with Cabri 3D*, in Proceedings ATCM 2012 Bangkok, Thailand.
http://atcm.mathandtech.org/EP2012/regular_papers/3472012_19914.pdf