Droites de SAAD

Propriétés du cercle d'Euler

Rédacteur :
Michel SAAD,
Ancien professeur de physique appliquée,
Auteur pour la jeunesse.

Découvertes par Michel SAAD en 1990 mais restées sans démonstration, des propriétés relatives au cercle d'Euler ont paru sur le site de l'IUFM et du CRDP de la Réunion dans un article intitulé *Droite des douze points.*

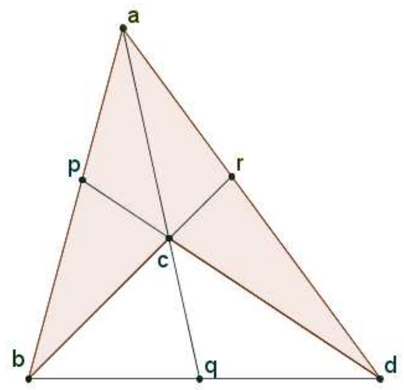
La démonstration proposée a été suggérée et suivie par un ancien professeur de mathématiques. L'auteur n'a pas la prétention de présenter la meilleure, amateurs et professionnels de la Géométrie sauront en simplifier les preuves.

Développée sous la forme d'un cours, cette démonstration s'adresse aux élèves de terminale et des classes préparatoires, ainsi qu'à leurs professeurs, aux amoureux de la Géométrie pure et à ceux restés nostalgiques envers celle des *''grands-parents''*. Les preuves apportées sont claires, rapides et illustrées de nombreuses figures.

L'auteur témoigne sa grande reconnaissance envers son professeur resté dans l'ombre, remercie M. Patrice Debart pour son intérêt et l'apport de sa touche personnelle, M. Jean-Louis Ayme pour sa collaboration, et voue un souvenir précieux envers Adel Anbouba son professeur émérite de Math-Elem des années soixante.

Sommaire

1- Le quadrangle

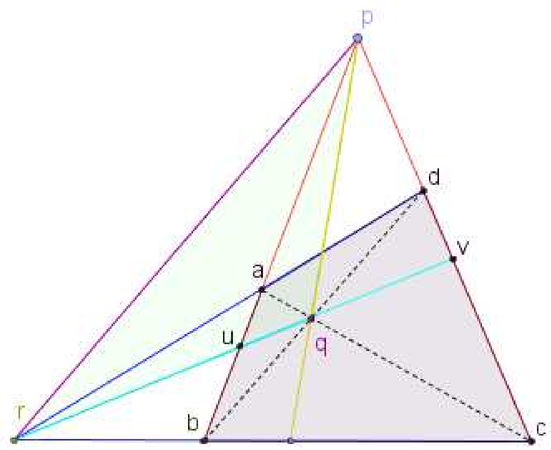


Un quadrangle est formé de :
- 4 sommets, a, b, c, d, l'ordre importe peu,
- 6 côtés 2 à 2 opposés ab, bc, cd, da, ac, bd,
- 1 triangle *diagonal* pqr dont les sommets sont à l'intersection de 2 côtés opposés.

Fig-1. le quadrangle.

2- Polaire d'un point par rapport à 2 droites

Soit p = (ab) ∩ (cd), q = (ac) ∩ (bd), r = (ad) ∩ (bc).
u = (rq) ∩ (ab), et v = (rq) ∩ (cd).
Soit u sur [ab] où la division (puab) est harmonique. Les faisceaux associés de sommet q et r le sont aussi, ainsi que leurs intersections avec (cd). Le faisceau harmonique {q.(puab)} est coupé par (cd) en la division harmonique (pvcd) et l'analogue {r.(puab)} coupé par (cd) en une division également harmonique (pv'cd). Donc (pv'cd) = (pvcd) et v' = v.



Formée par u et v, deux conjugués de p, la droite (rq) est la polaire de p par rapport à (bc) et (ad).

Par *permutation circulaire*, (pq) est la polaire de r par rapport à (cd) et (ab), et (pr) celle de q par rapport à (ca) et (bd).

Le triangle *diagonal* pqr est ''*auto-polaire*'' vis-à-vis du quadrangle abcd, chacun de ses côtés étant la polaire du sommet opposé.

Fig-2. Polaire d'un point vis-à-vis de 2 droites.

3- Points conjugués par rapport à un cercle

Deux points M et P sont conjugués par rapport à un cercle (C) de centre O et de rayon R *ssi* (*si et seulement si*) le produit scalaire
$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OP} = R^2$.
La polaire de M est l'ensemble des points conjugués de M et si la polaire de M passe en P, celle de P passe en M. On appelle cela la *réciprocité polaire*.

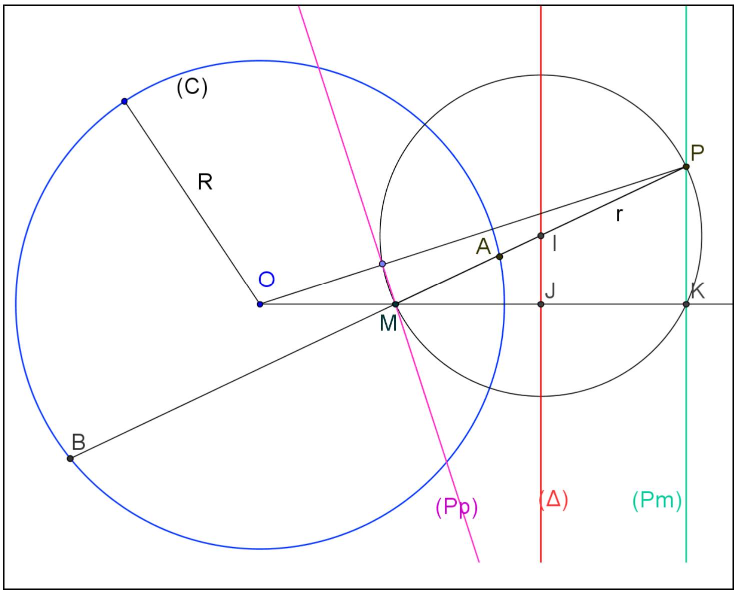
Si I est le milieu [MP], r = $|\overrightarrow{IP}|$, d = $|\overrightarrow{OI}|$, M et P sont conjugués ssi
$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OP} = (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}).(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IP}) = (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}).(\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{IM}) = OI^2 - OM^2 = d^2 - r^2 = R^2$
c-à-d ssi $d^2 = R^2 + r^2$, ssi le cercle (C) est orthogonal au cercle de diamètre [MP].

M et P sont conjugués vis-à-vis de (C) ssi le cercle de diamètre [MP] est orthogonal à (C).

$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OP} = \overline{OM}.\overline{OK}$, où K est la projection de $\overrightarrow{OP}$ sur (OM). D'où $\overline{OM}.\overline{OK} = R^2$.
Ainsi déterminé, le point K est l'inverse de M vis-à-vis de (C). La polaire de M est la droite (Pm) issue de P et perpendiculaire en K à (OM).

a- Conséquences

- Si M est intérieur à (C), K est extérieur, la polaire de M est non sécante à (C), tous ses points sont extérieurs à (C).
- Si M est sur (C), sa polaires est la tangente en M.
- Si M est extérieur à (C) et si T1 et T2 sont les contacts des tangentes à (C) issues de M, les polaires de T1 et T2 sont donc ces tangentes et par *réciprocité polaire*, la polaire de M est la droite (T1T2). **(voir fig-4)**



Si M est fixe, P décrivant la polaire de M, le faisceau de cercles défini par (C) et le cercle-point M comprend le cercle point K.

Son axe radical Δ est la médiatrice de [MK].

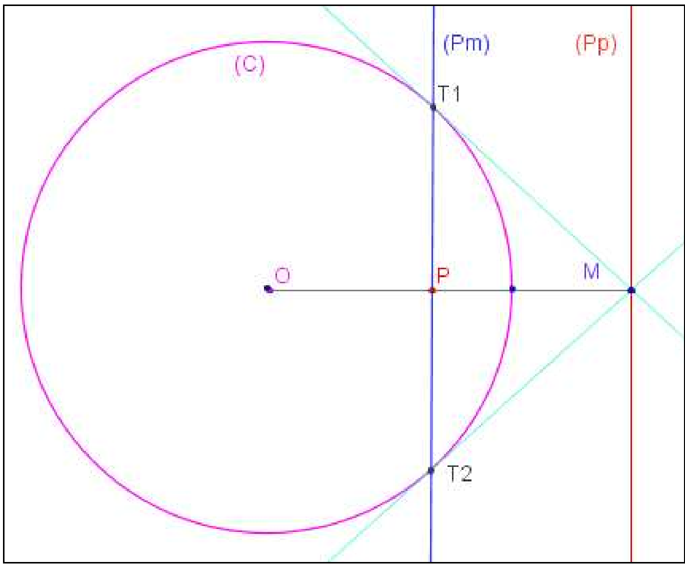
La polaire (Pm) de M est l'image de cet axe par l'homothétie *h*(M,2).

Fig-3. Polaire vis-à-vis d'un cercle :
(Pm) est la polaire de M, (Pp) celle de P

Soit (D) une droite passant par M et P et sécante à (C) en A et B. Soit I le milieu de [MP], centre d'un cercle (C') du faisceau. La puissance de I vis-à-vis de C et du cercle point K est :
$d^2 - R^2 = IK^2 = IM^2 = IP^2 = \overline{IA}.\overline{IB}$, la division (PMAB) est harmonique, (propriété du *milieu*).
Donc :
Une sécante issue de M coupant sa polaire en P et le cercle en A et B, la division (MPAB) est harmonique.

Autrement :
Deux cercles sont orthogonaux ssi un diamètre de l'un, sécant à l'autre, est coupé harmoniquement, et alors ils le sont tous.

b- Construction de la polaire du point



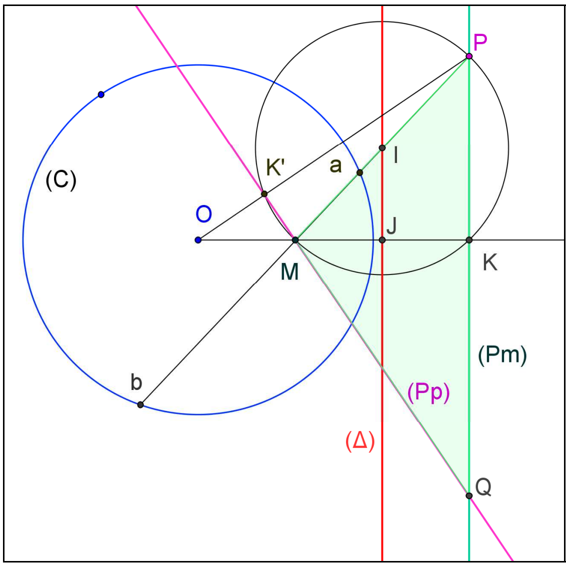
T1 et T2 étant les points de contact des tangentes à (C) issues de M extérieur à (C), le triangle OT1M est rectangle. On a : $OT1^2 = OT2^2 = OP.OM = R^2$.

Les point T1 et T2 appartiennent donc à (Pm) polaire de M vis-à-vis de (C).

En partant du point P intérieur à (C), la polaire de P s'obtient par une *démarche* inverse.

fig-4. (Pm) et (Pp) sont les polaires de M et P vis-à-vis de (C).

4- Polaires et orthocentre



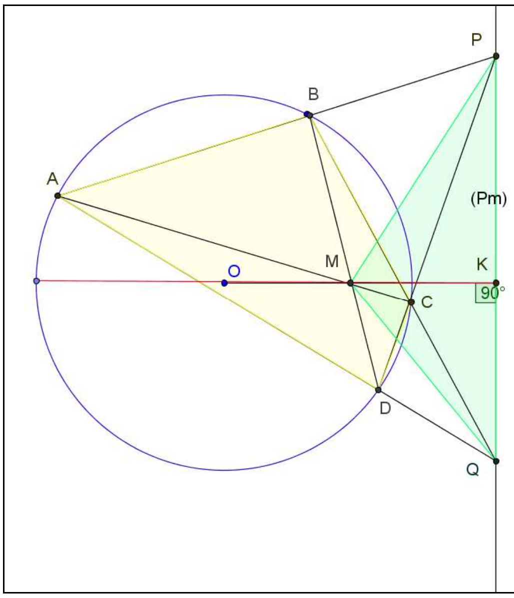
Soient (Pp) et (Pm) les polaires de P et de M vis-à-vis du cercle (C) et Q leur intersection.

Tout diamètre issu d'un sommet du triangle MPQ est orthogonal à sa polaire qui n'est autre que le côté opposé : le centre du cercle est l'orthocentre.

On obtient un tel triangle MPQ par le choix de M,– non sur le cercle – puis sur la polaire de M c-à-d en P ou en Q, également conjugués.

Fig-5. Le Centre Orthocentre.

5- Triangle conjugué à un cercle



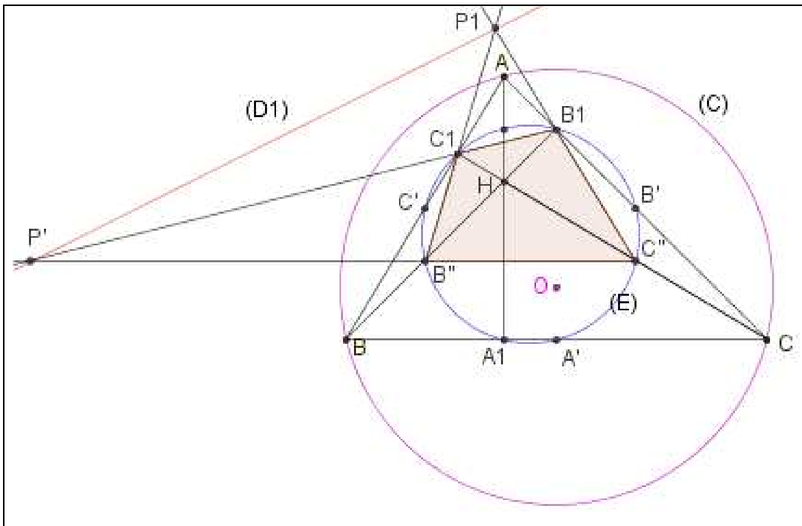
Les diamètres issus de M et P sont perpendiculaires à leurs polaires (PQ) et (MQ).
Les sommets du triangle MPQ sont les pôles des côtés opposés, ce triangle est dit *autopolaire* ou *triangle conjugué* au cercle.
Un tel triangle a ***un et un seul*** point intérieur au cercle, son orthocentre est centre de ce cercle.
Sur fig-5 on a représenté le diamètre issu de M.

Si un quadrangle est inscrit dans un cercle (C), son triangle diagonal est conjugué vis-à-vis de (C) : chaque sommet est le pôle du côté opposé.

Fig-6. Triangle autopolaire.

a- Applications à la droite D1 de Saad

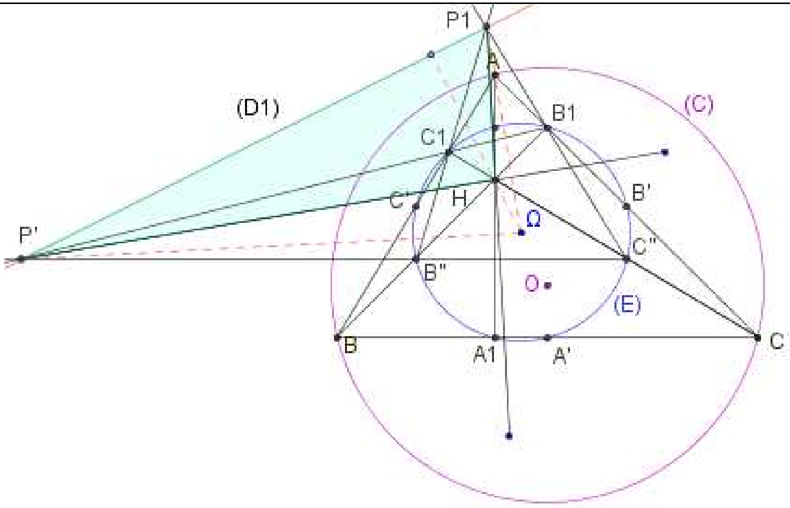
Le quadrangle $B_1C_1B''C''$ est inscrit dans le cercle d'Euler (E). Le triangle P'HP1 est *conjugué* à ce cercle. P1 et P'sont deux polaires de H par rapport à (E). Donc (D1) = (P'P_1) est la polaire de H par rapport à (E).



Propriété :

Le triangle diagonal de tout quadrangle inscrit dans (E) et dont deux côtés opposés se croisent en H est conjugué vis-à-vis de (E) et (D1) y est opposé à H.

Fig-7. Droite (D1) simplifiée.

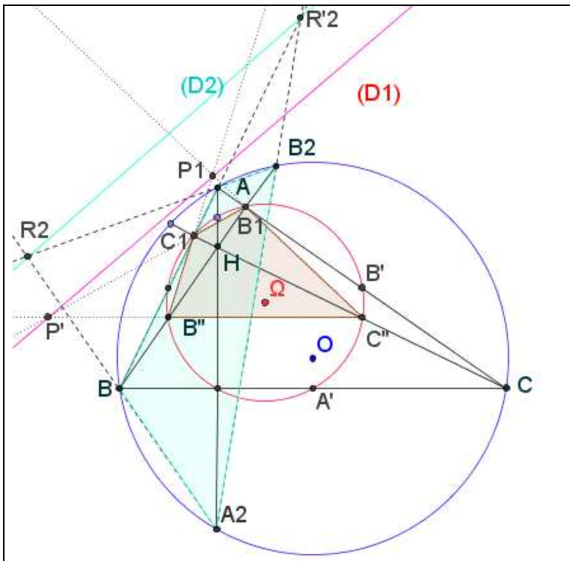


Il en est ainsi pour les trois quadrangles $B_1C_1B''C''$, C1A1C''A'', A1B1A''B'', dont les triangles diagonaux P'HP1, Q'HQ1, R'HR1 ont pour orthocentre Ω, centre de (E).

On obtient ainsi 6 points de (D1)

Fig-8. L'un des triangles diagonaux d'orthocentre **Ω.**

b- application à la Droite D2



L'homothétie *h*(H,2) transforme (E) en (C) et la polaire (D1) de H vis-à-vis du premier cercle en sa polaire (D2) vis-à-vis du second.

Fig- 9. Tracé en deux points des droites D1 et D2.

6- L'axe orthique du triangle

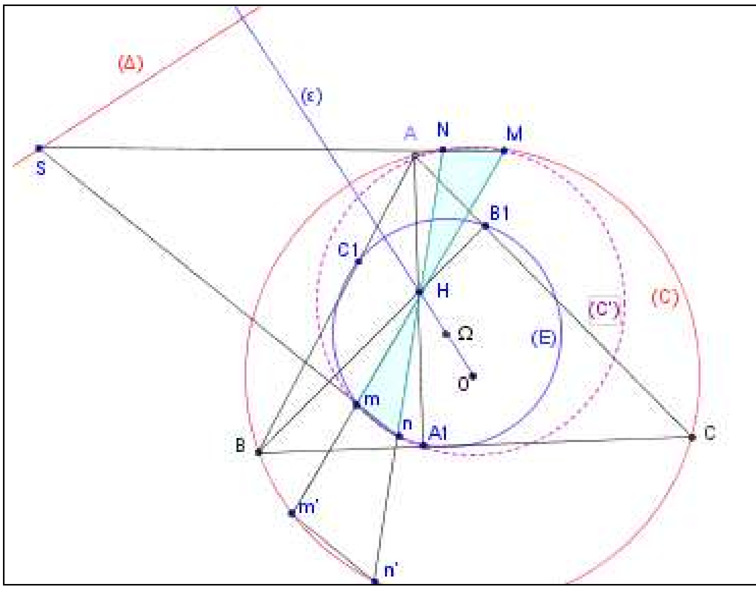
a- Rappel

L'homothétie *h*(H,2) transforme (E) en (C). Si m' et n' sont images par *h* de 2 points de (E) $\overrightarrow{m'n'} = 2\,\overrightarrow{mn}$. Soit M = (mH) ∩ (C) et N = (nH) ∩ (C), on a :

$\overline{Hm'}\,.\,\overline{HM} = \overline{Hn'}\,.\,\overline{HN} = k$, $\overline{Hm}\,.\,\overline{HM} = \overline{Hn}\,.\,\overline{HN} = k/2$

b- Conséquence 1

L'orthocentre H est le centre de l'homothétie h qui transforme (E) en (C) et le pôle d'une inversion de puissance k/2 qui les échange.



Si mn est une corde de (E),
m'n' = *h*(m)*h*(n) une corde de (C),
((m'n') étant parallèle à (mn)),
MN = *J*(m)*J*(n) est une corde de (C), les pts m,n,M,N appartiennent à un cercle (C').

Les droites (mn) et (MN) et (Δ) axes radicaux de (C'), (C) et (E) pris 2 à 2 se coupent en un point S, centre radical des 3 cercles, ou sont parallèles.

Fig-10. Le centre radical S est sur Δ.

c- Conséquence 2

Si mn est une corde formée de 2 points de (E) et MN la corde correspondante formée de leurs inverses sur (C), alors les droites (MN) et (mn) se coupent sur Δ, axe radical de (E) et (C). Et réciproquement. (l'auteur utilise le mot *correspondant* au lieu de *antihomologue* devenu obsolète)

d- Application à la *Droite des douze points*

Si mn = B1C'' sur (E), MN = BC2 sur (C), alors I = B1C'' ∩ BC2 appartient à *la droite des douze points* Δ.

De même, si mn = A1B'', MN = AB2, alors K = A1B'' ∩ AB2 appartient à Δ.
Il en sera ainsi pour les autres points remarquables.

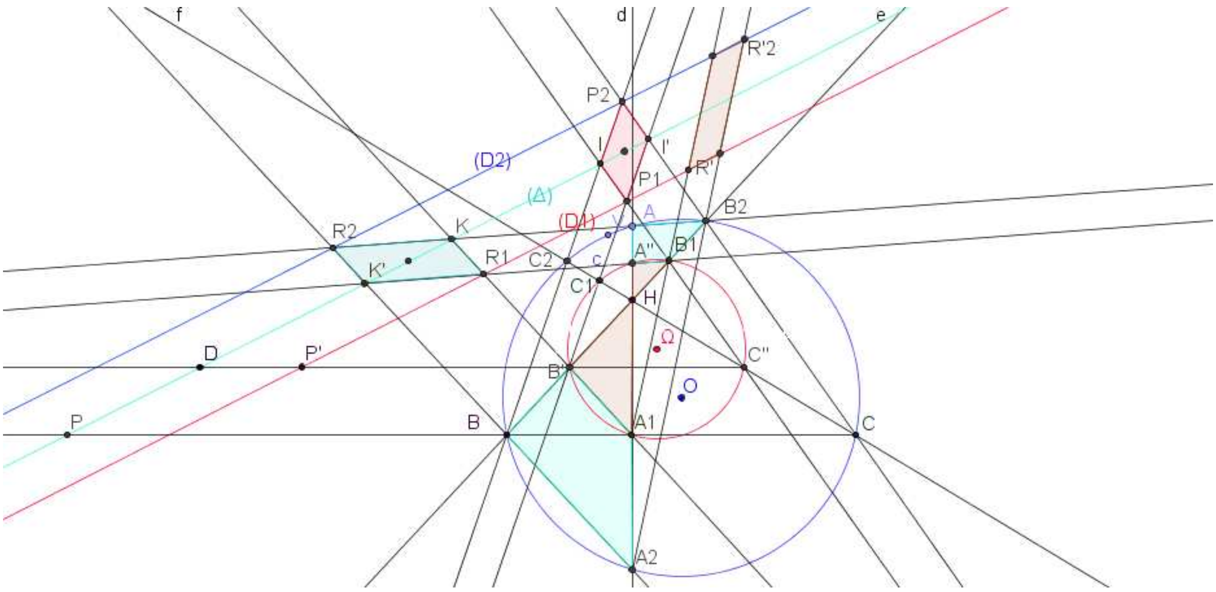
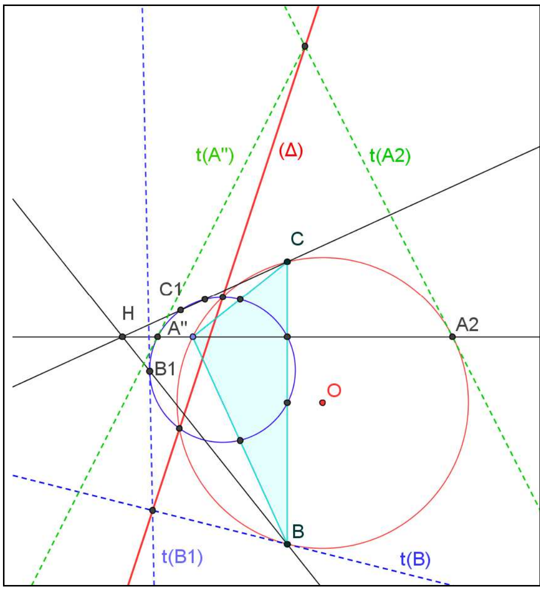


fig-11. figure générale, triangle ABC acutangle.

e- Les tangentes

Si m = n, la corde mn est confondue avec la tangente en m à (E) et sa *correspondante* avec la tangente en M à (C).
Les tangentes en deux points correspondants se coupent sur l'axe orthique Δ.



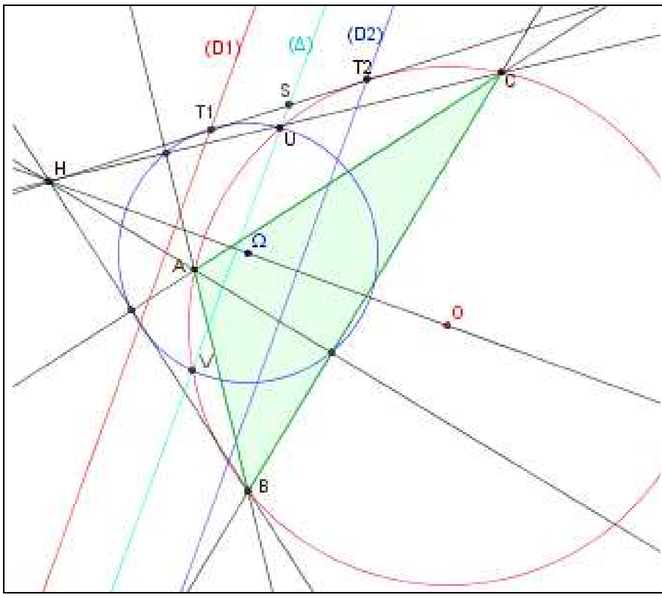
Il en sera ainsi pour
- les tangentes à (C) issues A, B, C et leurs correspondantes les tangentes à (E) issues de A1, B1, C1.
- les tangentes en A'', B'', C'' à (E) et leurs correspondantes issues de A2, B2, C2 sur (C).
- les tangentes en A', B', C' et leurs correspondantes α β et γ définis par α = (A'H) ∩ (C), β = (B'H) ∩ (C) et γ = (C'H) ∩ (C).

Il est plus commode de représenter l'axe radical Δ de (E) et (C) avec un triangle obtusangle.

Fig-12. Intersections sur Δ des tangentes en A'' et A2, en B et B1…

f- L'axe orthique, axe de symétrie des polaires
On a : *h* (C'') = C et *h*(B1) = B2, les deux droites (C''B1) et (CB2) sont parallèles et coupent (D1) et (D2) en P1 et P2, et (Δ) en I et I'. De même, *h*(B'') = B et *h*(C1) = C2, les deux droites parallèles (B''C1) et (C1C2) coupent (D1) et (D2) aux mêmes points. Le quadrilatère (P1,I,P2,I') est un parallélogramme dont le centre et la diagonale [II'] appartiennent à Δ.
On remarque 6 tels parallélogrammes dont le centre et une diagonale appartiennent à (Δ).
L'axe orthique (Δ) est l'image de (D1) par l'homothétie *h*(H, 3/2). Il est axe de symétrie des deux polaires (D1) et (D2).

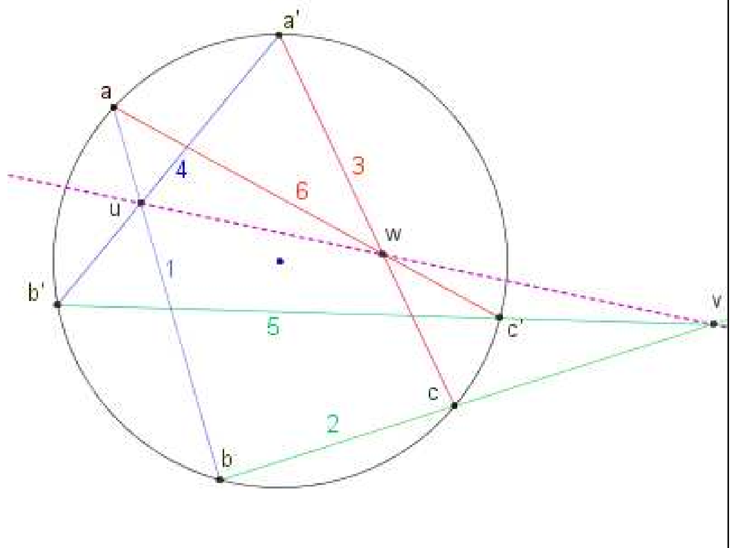
***Le démonstration est plus simple avec un triangle obtusangle* :**



Si le triangle ABC a un angle obtus, en A par exemple, l'orthocentre H est à l'extérieur du triangle.
H étant un centre d'homothétie qui transforme (E) en (C), cercles sécants en U et V, soient T1 et T2 les points de contact de leur tangente commune, issue de H.
L'axe radical (UV) coupe [T1T2] en S.
On a ST1 = ST2 et $ST1^2 = ST2^2 = SU.SV$
Or (D1) et (D2), polaires de H vis-à-vis des deux cercles sont les perpendiculaires à (OH) issues de T1 et T2.
Par conséquent (Δ) est axe de symétrie de {(D1), (D2)}.

fig-13. Triangle ABC obtusangle.

7- Propriété du centre du cercle d'Euler



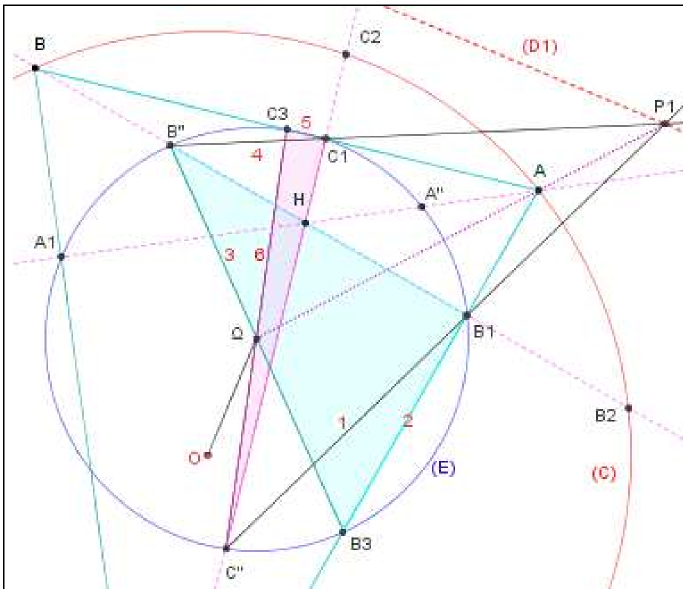
a- rappel
Soient a, b, c, a', b', c' six points distincts d'un cercle et u, v, w les points définis par :
{1, 4} : (ab) ∩ (a'b') = u
{2, 5} : (bc) ∩ (b'c') = v
{3, 6} : (ca') ∩ (ac') = w

Théorème de Pascal
Les trois points u, v, w sont alignés.

Fig-14. théorème de Pascal

b- Droites passant par le centre du cercle d'Euler

(Cette démonstration a été apportée par Jean-Louis Ayme). http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme



Soit B3 = (AC) ∩ (E) et C3 = (AB) ∩ (E). Les triangles B''B1B3 et C''C1C3 sont rectangles en B1 et C1, [B''B3] et [C''C3] sont 2 diamètres de (E). Considérons l'hexagone C''B1B3B''C1C3, On a :
{1, 4} : (C''B1) ∩ (B''C1) = P1
{2, 5} : (B1B3) ∩ C1C3 = A
{3, 6} : (B''B3) ∩ (C''C3) = Ω

D'après le théorème de Pascal, les 3 points P1, A, Ω sont alignés.
Une permutation circulaire montre l'alignement de Q1, B, Ω et celui de R1, C, Ω

Fig 15. Propriété de Ω, centre de (E).