UNE ACTIVITÉ MATHS-INFO EN 1re S[1]

Une exploration autour des deux couples d'indicateurs statistiques : (moyenne arithmétique ; écart-type) (médiane ; écart absolu moyen)

Le but de cette activité est de caractériser la *moyenne* arithmétique d'une série de données numériques, comme le nombre "*le plus près*" de l'ensemble des nombres de la série au sens d'une certaine distance (la distance euclidienne !), et la *médiane* comme l'un des nombres, ou le nombre, le plus près de l'ensemble des nombres de la série au sens d'une autre distance.
L'*écart-type* et l'*écart absolu moyen* n'étant, dans chacun des cas respectifs, que cette plus petite distance.

On considère pour cet exercice une série extrêmement simple et « limitée », la série des 5 valeurs : 1 ; 3 ; 4 ; 9 ; 15.

On veut trouver un nombre qui résume la série, donc un nombre qui sera proche de l'ensemble des nombres de la série, et même on souhaite trouver, s'il existe, le nombre le plus proche de l'ensemble des nombres de la série.

Remarque : si on fait une analogie avec des points dans un plan, on peut dire que le point le plus près de l'ensemble de 5 points du plan est le point du plan dont la somme des distances à ces 5 points est minimale

I. Un premier de choix de distance

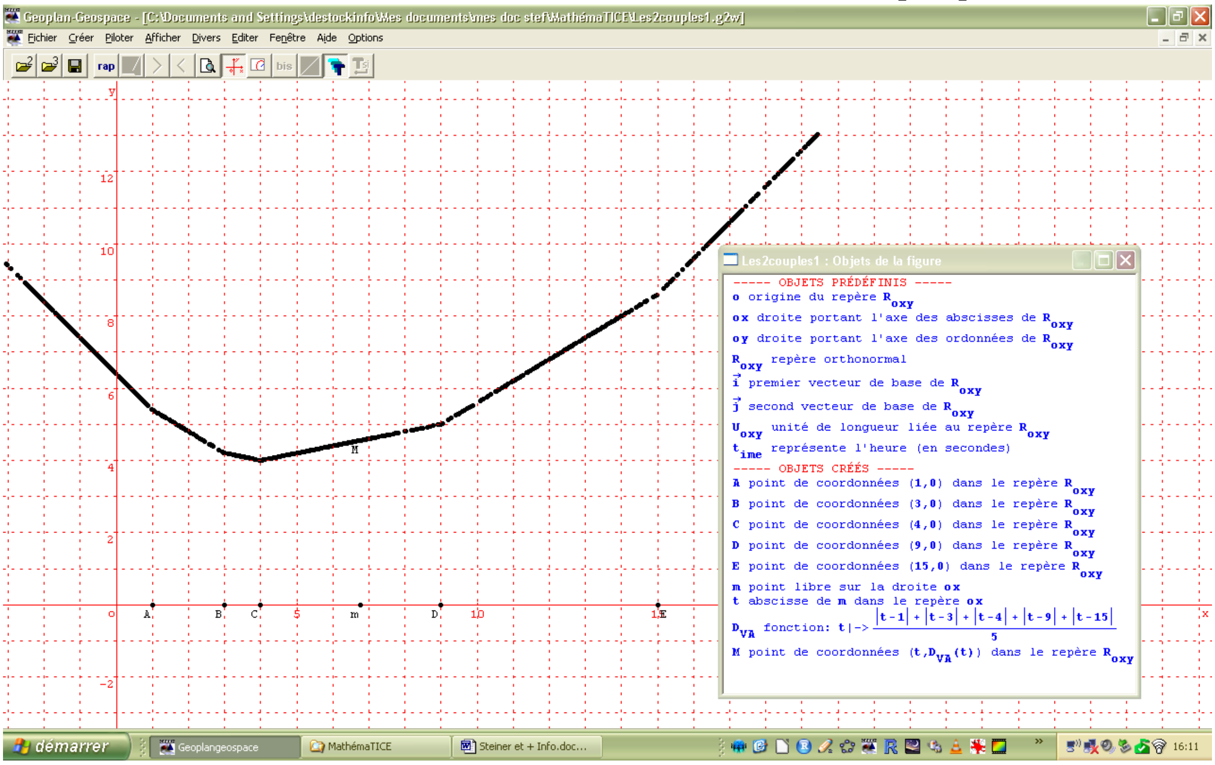
Que pouvons-nous choisir comme distance dans le cas des nombres ? On voit en 1re S que $|x-a|$ s'interprète comme la distance du nombre *x* au nombre *a*. Donc pour un nombre *t*, on pourra mesurer la distance de *t* à la série indiquée plus haut par le nombre $|t-1|+|t-3|+|t-4|+|t-9|+|t-15|$.
Par exemple la distance du nombre 6 à la série est : 22.
On peut même considérer la moyenne des distances du nombre à tous les nombres de la série, soit pour le nombre 6 : 4,5.
La distance de 3 à la série est de même : 4,1.
D'où l'on conclut que 3 est plus près de la série que 6.
On veut donc trouver le (s'il existe et est unique) nombre le plus près de la série.

[1] En hommage à Jean FAGES, mon maître à l'ENFA, qui m'a fait découvrir Geoplan à travers cette activité.

Utilisation de GEOPLAN

Dans une feuille de dessin :

1) Marquer les 5 points de l'axe des abscisses A, B, C, D et E d'abscisses 1, 3, 4, 9, 15.
2) Construire le point variable m de l'axe des abscisses.
3) Définir t l'abscisse de m.
4) Définir la fonction DVA qui prend pour valeur $\left(|t-1|+|t-3|+|t-4|+|t-9|+|t-15|\right)/5$.
5) Construire le point M de coordonnées t et $DVA(t)$.
6) Faire dessiner la trace de M quand m décrit $[AE]$.



➢ Examiner, comprendre, conjecturer

....

....

....

....

....

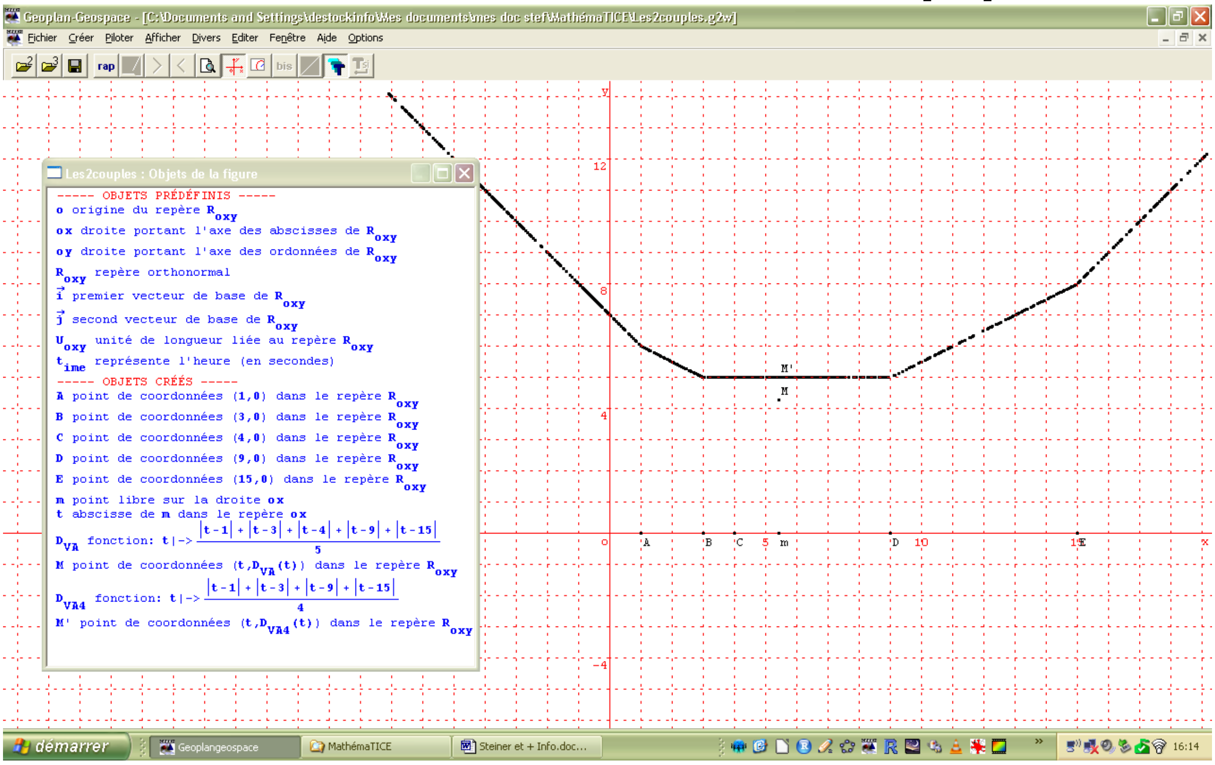
....

....

7) Définir la fonction $DVA4$ qui prend pour valeur $(|t-1|+|t-3|+|t-9|+|t-15|)/4$.

8) Construire le point M' de coordonnées t et $DVA4(t)$.

9) Faire dessiner la trace de M' quand m décrit $[AE]$.



➢ Examiner, comparer, comprendre, conjecturer

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………..

<u>Commentaire</u> : on peut démontrer ce résultat dans le cas général en étudiant la fonction DVA, affine par morceau.

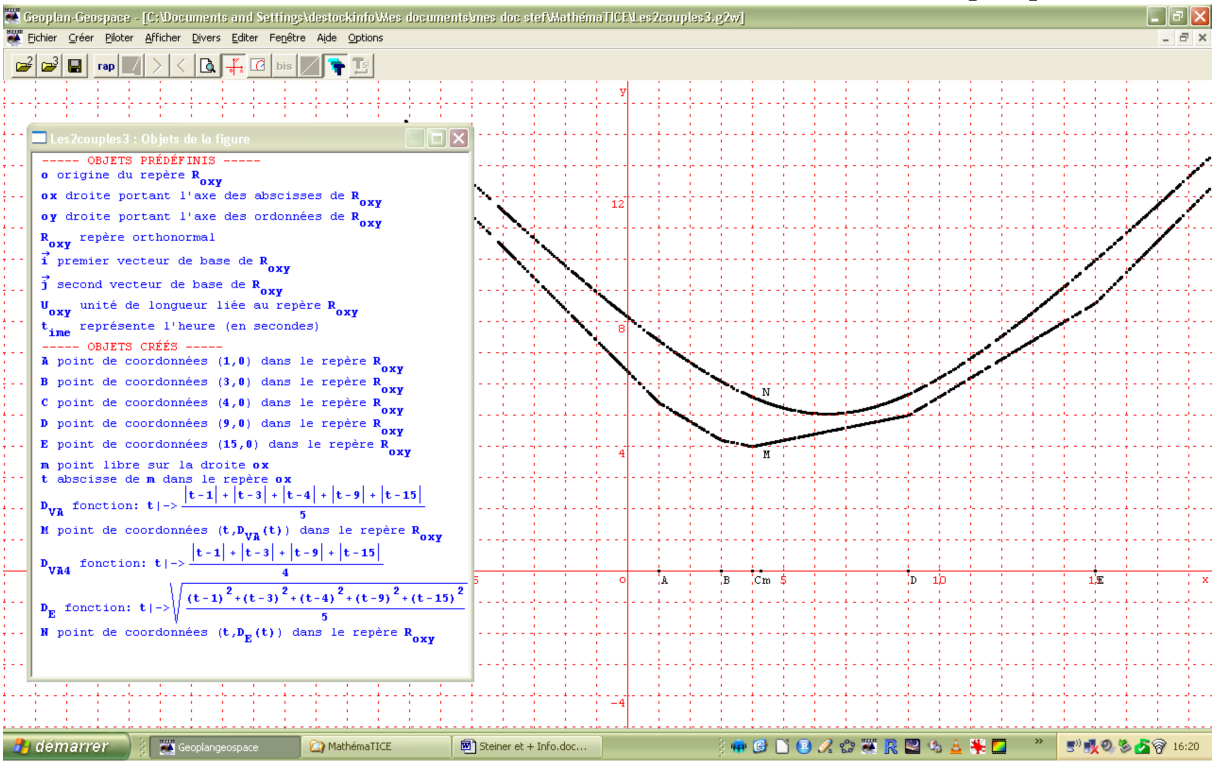
II. Un deuxième choix de distance

Si nous prenons pour mesurer la distance d'un nombre t à la série « la racine carrée de la moyenne des carrés des écarts du nombre t à chacun des nombres de la série », soit dans notre cas pour être plus concret $\sqrt{\dfrac{(t-1)^2+(t-3)^2+(t-4)^2+(t-9)^2+(t-15)^2}{5}}$, on obtient pour la distance de 6 à la série : 5,06 ; de même pour 3 : 6,08.
Ici aussi on veut trouver le nombre (s'il existe et est unique) le plus près de la série.

Utilisation de GEOPLAN

Sur le même graphique :

1) Définir la fonction DE qui prend pour valeur $rac\left(\left((t-1)^2+(t-3)^2+(t-4)^2+(t-9)^2+(t-15)^2\right)/5\right)$.
2) Définir le point N de coordonnées t et $DE(t)$.
3) Faire dessiner la trace de M et N quand m décrit $[AE]$.



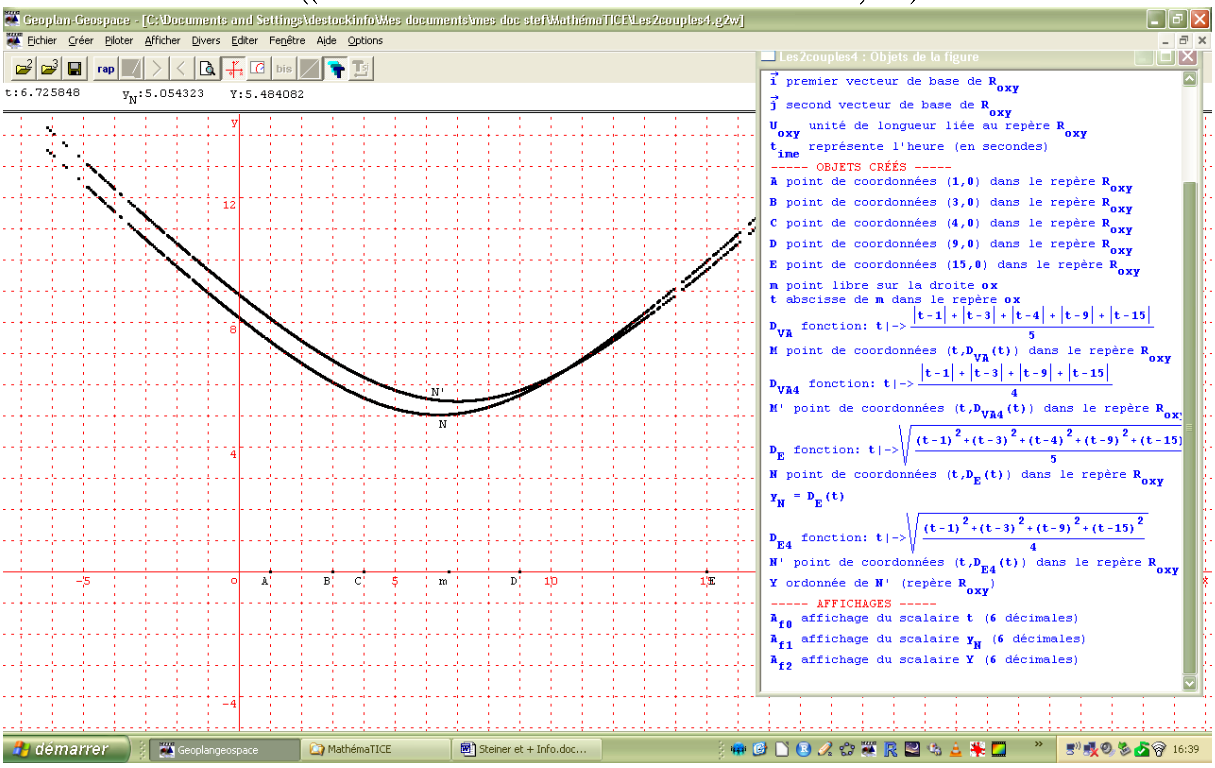
➢ Examiner, comprendre, conjecturer

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

4) Définir la fonction $DE4$ qui prend pour valeur
$$rac\left(\left((t-1)^2+(t-3)^2+(t-9)^2+(t-15)^2\right)/4\right).$$



➢ Examiner, comparer, comprendre, conjecturer

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

<u>Commentaire</u> : le résultat général est le théorème de STEINER que l'on peut démontrer dans un cours de 1re S (étude d'un trinôme du 2nd degré).