J. Lubczanski, I. Lallier-Girot, R. Volsik

L'idée du travail ci-dessous provient d'un manuel scolaire de mathématiques hongrois :
"*Matematikai fogalmak, tételek*" (Hajnal Imre, Szeged, 1997).

On note u_n la somme des entiers de 1 à n, et v_n la somme des carrés des entiers de 1 à n :

$$u_n = 1+2+3+\ \dots\ +n \quad ; \quad v_n = 1^2+2^2+3^2+\ \dots\ +n^2$$

L'objectif de ce travail est d'observer et d'étudier la suite des quotients $w_n = \dfrac{v_n}{u_n}$

A - MISE EN PLACE DU CALCUL

1. Ouvrir une nouvelle feuille de classeur. Créer cinq colonnes, intitulées : n , u_n , n^2 , v_n et w_n .
2. La ligne sous les entêtes correspondra à $n = 1$: saisir les valeurs correspondantes dans chacune des colonnes.
3. Dans la ligne suivante, saisir les formules qui permettront d'obtenir par recopiage vers la bas les valeurs successives de n , u_n , n^2 , v_n et w_n. Recopier vers le bas jusqu'à $n = 20$.

B - OBSERVATIONS ET CONJECTURES

1. **Ecriture décimale de $\mathbf{w_n}$**
   a. Observez les valeurs obtenues pour w_n : qu'est-ce qui est remarquable ?
   b. Quelle conjecture pouvez-vous faire sur l'écriture décimale des nombres w_n ?
   c. Recopiez plus loin vers le bas : votre conjecture reste-t-elle valable ?
2. **Nature de la suite $\mathbf{w_n}$**
   a. Créez un graphique représentant w_n en fonction de n.
   b. Quelle allure a ce graphique ? A quel type de suite cela correspond-il ?
   Quelle conjecture pouvez-vous faire sur la nature de la suite w_n ?
   c. Quelle nouvelle colonne pouvez-vous créer pour mettre à l'épreuve cette conjecture ? Faites le !
3. **Expression de $\mathbf{w_n}$ en fonction de n**
   a. A quelle expression $w_n = f(n)$ conduit votre conjecture précédente ?
   b. Créez une colonne intitulée $f(n)$, où vous saisirez la formule permettant d'obtenir les valeurs successives de $f(n)$ par recopiage vers le bas.
   c. Les valeurs obtenues avec l'expression $f(n)$ coincident-elles avec celles obtenues pour w_n ?

C - CALCULS LITTERAUX

On peut établir, et on admettra ici, que pour tout $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $v_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

1. **Vérification des formules**
   a. Créez deux nouvelles colonnes correspondant aux formules ci-dessus.
   b. Vérifiiez que les valeurs données par ces formules concident avec celles que vous avez calculées au A-3.
2. **Expression et nature de la suite $\mathbf{w_n}$**
   a. Quelle expression de w_n les formules données ci-dessus pour u_n et v_n permettent-elles d'obtenir ?
   b. Retrouvez à partir cette expression la nature et les éléments caractéristiques de la suite w_n. Conclure.