J. Lubczanski, I. Lallier-Girot, R. Volsik

La page du prof

Cet énoncé a un double objectif :
– au niveau contenu, proposer plusieurs approches expérimentales de la notion de suite arithmétique : variation des décimales des termes, allure du graphique $n \to w_n$. Ces approches débouchent au final sur l'écriture du terme général comme fonction affine de n.
– au niveau méthode, effectuer un véritable travail scientifique d'élaboration et de mise à l'épreuve de conjectures simples issues de l'observation. Le tableur est ici l'outil qui permet facilement ce travail.

La suite (w_n) qu'on va observer et étudier est définie comme le quotient de deux suites classiques, mais ces suites ne sont pas assez familières aux élèves pour qu'il puissent en déterminer immédiatement la nature, ce qui justifie une approche expérimentale.

Nous supposons en particulier que les formules classiques de u_n et v_n en fonction de n ne font pas partie du bagage disponible. Dans la partie théorique, nous fournissons aux élèves des formules polynomiales pour u_n et v_n, sur lesquelles ils auront à faire un travail littéral pour démontrer l'expression conjecturée à l'issue du travail pratique.

A - MISE EN PLACE DU CALCUL

Dans nos textes, "créer" une colonne signifie simplement saisir un texte en entête dans la première ligne de cette colonne, pour décrire son contenu. Le calcul au tableur des termes u_n et v_n découle de la définition récurrente de ces suites :

$$u_1 = 1 \text{ et pour } n \geq 2, u_n = u_{n-1} + n \ ; \quad v_1 = 1 \text{ et pour } n \geq 2, v_n = v_{n-1} + n^2$$

La contenu de la case contenant u_n est la somme des contenus de la case du dessus et de la case de gauche. On n'a pas besoin de l'adressage absolu avec les $. Ce calcul peut-être l'occasion de remarquer que le tableur met en pratique le principe de récurrence : une fois la première valeur saisie, la formule permet le recopiage vers le bas aussi loin qu'on veut, c'est à dire pour tout entier n.

B - OBSERVATIONS ET CONJECTURES

1. **Ecriture décimale de $\mathbf{w_n}$**
   Il apparaît qu'on obtient la suite des impairs tous les trois rangs, et que la partie décimale des autres termes se répète aussi tous les trois rangs. Il est préférable de limiter le nombre de décimales affichées à 2, car le but n'est pas de reconnaître les décimales associées aux tiers, mais d'arriver à formuler une conjecture pour décrire la répétition cyclique d'ordre 3.
2. **Nature de la suite $\mathbf{w_n}$**
   Le graphique est rectiligne : c'est le moment de faire percevoir que d'après ce graphique, quand n augmente d'une unité, w_n augmente toujours de la même quantité, ce qui est le propre d'une suite arithmétique.
   Pour mettre à l'épreuve cette conjecture, on peut créer la colonne des différences d'un terme à l'autre, pour vérifier qu'on obtient toujours le même résultat : ce sera la raison de la suite, qu'on trouvera égale à 0,67 avec l'affichage à 2 décimales.
3. **Expression de $\mathbf{w_n}$ en fonction de n**
   Une fois qu'on a le premier terme 1 et la raison 0,67, on peut établir la formule $w_n = 1 + (n-1) \times 0,67$, et créer une nouvelle colonne pour mettre à l'épreuve cette formule. Il est bon de garder la valeur 0,67 pour la raison car cela provoque un questionnement intéressant : on s'aperçoit que la formule ne donne que des résultats très approchés, et il faut alors se demander pourquoi.
   Une idée naturelle est d'ajouter une ou plusieurs décimales à l'affichage : cela augmente la précision sur la "raison", mais ne résout pas le fond du problème. La solution est de revenir aux nombres impairs consécutifs qu'on a obtenu tous les trois rangs : si on augmente de 2 en trois fois, c'est qu'on augmente de $^2/_3$ à chaque fois.
   Ce point acquis, on arrive au bout du travail pratique à la conjecture : $f(n) = 1 + {}^2/_3(n-1)$.

C - CALCULS LITTERAUX

Les formules pour u_n et v_n sont données comme une information. Il n'est pas nécessaire que les élèves les aient déjà vu au moment de ce travail. On pourrait même leur avoir demandé de les trouver par une recherche documentaire (livres, Internet ...)

1. **Vérification des formules**
   Cette "vérification" est là pour s'assurer que les élèves ont compris le rapport entre ces formules et les sommes d'entiers et de carrés qu'ils ont calculé au début de ce travail. De plus, vérifier par principe que l'information qu'on nous fournit est fiable nous semble une bonne attitude.
2. **Expression et nature de la suite $\mathbf{w_n}$**
   Après simplifications par 3, par n et par $n+1$, on arrive à $w_n = \dfrac{2n+1}{3}$.
   Il reste un travail à faire pour reconnaître dans cette expression une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison $^2/_3$.
   En particulier, on remarquera que la suite (w_n), comme d'ailleurs les suites (u_n) et (v_n) commence au rang $n = 1$:
   le premier terme de $w_n = \dfrac{2n+1}{3}$ s'obtient pour $n = 1$ et non pas pour $n = 0$: le premier terme w_1 est bien égal à 1.
   On peut alors conclure que le travail théorique valide la conjecture.