Le jeu du franc-carreau et le problème de l'aiguille de Buffon
Texte original

Essai d'Arithmétique morale, dans *Histoire Naturelle générale et particulière servant de suite à l'Histoire Naturelle de l'Homme* par M. le Comte de Buffon, Supplément, Tome Septième, p. 139 - 153, Imprimerie Royale, Paris, 1778

L'ANALYSE est le seul instrument dont on se soit servi jusqu'à ce jour dans la science des probabilités, pour déterminer & fixer les rapports du hasard ; la Géométrie paroissoit peu propre à un ouvrage aussi délié ; cependant si l'on y regarde de près, il sera facile de reconnoître que cet avantage de l'Analyse sur la Géométrie, est tout-à-fait accidentel, & que le hasard, selon qu'il est modifié & conditionné, se trouve du ressort de la géométrie aussi-bien que de celui de l'analyse ; pour s'en assurer, il suffira de faire attention que les jeux & les questions de conjecture ne roulent ordinairement que sur des rapports de quantités discrètes ; l'esprit humain plus familier avec les nombres qu'avec les mesures de l'étendue les a toujours préférés ; les jeux en sont une preuve, car leurs loix sont une arithmétique continuelle ; pour mettre donc la Géométrie en possession de ses droits sur la science du hasard, il ne s'agit que d'inventer des jeux qui roulent fur l'étendue & sur ces rapports, ou calculer le petit nombre de ceux de cette nature qui font déjà trouvés ; le jeu du franc-carreau peut nous servir d'exemple : voici ces conditions qui sont fort simples.

Dans une chambre parquetée ou pavée de carreaux égaux, d'une figure quelconque, on jette en l'air un écu ; l'un des joueurs parie que cet écu après sa chûte, se trouvera à franc-carreau, c'est-à-dire, fur un seul carreau ; le second parie que cet écu se trouvera sur deux carreaux, c'est-à-dire, qu'il couvrira un des joints qui les séparent ; un troisième joueur parie que l'écu se trouvera sur deux joints ; un quatrième parie que l'écu se trouvera sur trois, quatre ou six joints : on demande les sorts de chacun de ces joueurs.

Je cherche d'abord le fort du premier joueur & du second ; pour le trouver, j'inscris dans l'un des carreaux une figure semblable, éloignée des côtés du carreau, de la longueur du demi-diamètre de l'écu ; le sort du premier joueur fera à celui du second, comme la superficie de la couronne circonscrite est à la superficie de la figure inscrite ; cela peut se démontrer aisément, car tant que le centre de l'écu est dans la figure inscrite, cet écu ne peut être que sur un seul carreau, puisque par construction cette figure inscrite est partout éloignée du contour du carreau, d'une distance égale au rayon de l'écu ; & au contraire dès que le centre de l'écu tombe au dehors de la figure inscrite, l'écu est nécessairement fur deux ou plusieurs carreaux, puisqu'alors son rayon est plus grand que la distance du contour de cette figure inscrite au contour du carreau ; or tous les points où peut tomber ce centre de l'écu sont représentés dans le premier cas par la superficie de la couronne, qui fait le reste du carreau ; donc le sort du premier joueur est au sort du second, comme cette première superficie est à la seconde ; ainsi, pour rendre égal le fort de ces deux joueurs, il faut que la superficie de la figure inscrite, soit égale à celle de la couronne, ou, ce qui est la même chose, qu'elle soit la moitié de la surface totale du carreau.
Je me suis amusé à en faire le calcul, & j'ai trouvé que pour jouer à jeu égal sur des carreaux carrés, le côté du carreau devoit être au diamètre de l'écu comme[1] $1 : 1-\sqrt{\frac{1}{2}}$; c'est-à-dire, à-peu-près trois & demi fois plus grand que le diamètre de la pièce avec laquelle on joue.

---

[1] $1 : 1-\sqrt{\frac{1}{2}}$ se lit « 1 est à $1-\sqrt{\frac{1}{2}}$ ».

Pour jouer sur des carreaux triangulaires équilatéraux, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1 : \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{3+3\sqrt{\frac{1}{2}}}$, c'est-à-dire, presque six fois plus grand que le diamètre de la pièce.

Sur des carreaux en losange, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1 : \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}$, c'est-à-dire, presque quatre fois plus grand.

Enfin sur des carreaux hexagones, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1 : \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1+\sqrt{\frac{1}{2}}}$, c'est-à-dire, presque double. Je n'ai pas fait le calcul pour d'autres figures, parce que celles-ci font les seules dont on puisse remplir un espace sans y laisser des intervalles d'autres figures ; & je n'ai pas cru qu'il fût nécessaire d'avertir que les joints des carreaux ayant quelque largeur, ils donnent de l'avantage au joueur qui parie pour le joint, & que par conséquent l'on fera bien, pour rendre le jeu encore plus égal, de donner aux carreaux carrés un peu plus de trois & demi fois, aux triangulaires six fois, aux losanges quatre fois, & aux hexagones deux fois la longueur du diamètre de la pièce avec laquelle on joue.

Je cherche maintenant le sort du troisième joueur qui parie que l'écu se trouvera sur deux joints ; &, pour le trouver, j'inscris dans l'un des carreaux une figure semblable, comme j'ai déjà fait, ensuite je prolonge les côtés de cette figure inscrite jusqu'à ce qu'ils rencontrent ceux du carreau, le sort du troisième joueur sera à celui de son adversaire, comme la somme des espaces compris entre le prolongement de ces lignes & les côtés du carreau, est au reste de la surface du carreau. Ceci n'a besoin, pour être pleinement démontré, que d'être bien entendu.

J'ai fait aussi le calcul de ce cas, & j'ai trouvé que pour jouer à jeu égal fur des carreaux carrés, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1 : \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, c'est-à-dire, plus grand d'un peu moins d'un tiers.

Sur des carreaux triangulaires équilatéraux, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme 1 : ½, c'est-à-dire, double.

Sur des carreaux en losange, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1 : \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, c'est-à-dire, plus grand d'environ deux cinquièmes.

Sur des carreaux hexagones, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1 : \frac{1}{2}\sqrt{3}$, c'est-à-dire, plus grand d'un demi-quart.

Maintenant le quatrième joueur parie que sur des carreaux triangulaires équilatéraux, l'écu se trouvera sur six joints, que sur des carreaux carrés ou en losanges, il se trouvera fur quatre joints, & sur des carreaux hexagones, il se trouvera sur trois joints ; pour déterminer son sort, je décris de la pointe d'un angle du carreau, un cercle égal à l'écu, & je dis que sur des carreaux triangulaires équilatéraux, son sort sera à celui de son adversaire, comme la moitié de la superficie de ce cercle est à celle du reste du carreau ; que sur des carreaux carrés ou en losanges, son sort sera à celui de l'autre, comme la superficie entière du cercle est à celle du reste du carreau ; & que sur des carreaux hexagones, son sort sera à celui de son adversaire, comme le double de cette superficie du cercle est au reste du carreau. En supposant donc que la circonférence du cercle est au diamètre, comme 22 sont à 7, on trouvera que, pour jouer à jeu égal sur des carreaux triangulaires équilatéraux, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1 : \frac{\sqrt{7\sqrt{3}}}{22}$, c'est-à-dire, plus grand d'un peu plus d'un quart.

Sur des carreaux en losanges, le sort sera le même que sur des carreaux triangulaires équilatéraux.

Sur des carreaux carrés, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce comme $1 : \frac{\sqrt{11}}{7}$, c'est-à-dire, plus grand d'environ un cinquième.

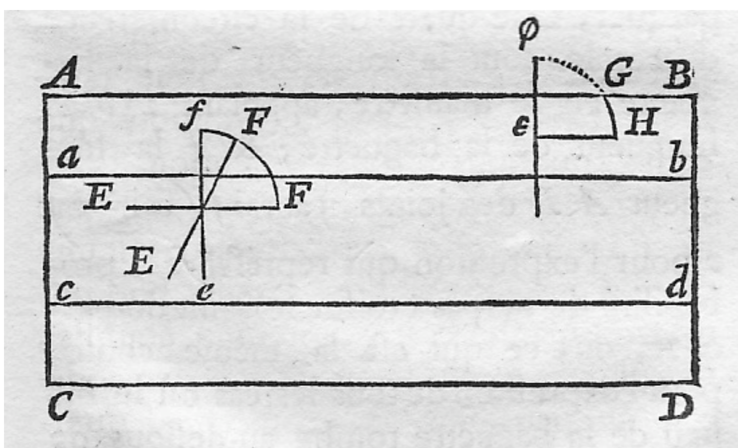
Sur des carreaux hexagones, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce comme $1 : \frac{\sqrt{21\sqrt{3}}}{44}$, c'est-à-dire, plus grand d'environ un treizième.

J'omets ici la solution de plusieurs autres cas, comme lorsque l'un des joueurs parie que l'écu ne tombera que sur un joint ou sur deux, sur trois, &c. ils n'ont rien de plus difficile que les précédens ; & d'ailleurs on joue rarement ce jeu avec d'autres conditions que celles dont nous avons fait mention.

Mais si au lieu de jeter en l'air une pièce ronde, comme un écu, on jetoit une pièce d'une autre figure, comme une pistole d'Espagne carrée, ou une aiguille, une baguette, &c. le problème demanderoit un peu plus de géométrie, quoiqu'en général il fût toujours possible d'en donner la solution par des comparaisons d'espaces, comme nous allons le démontrer.

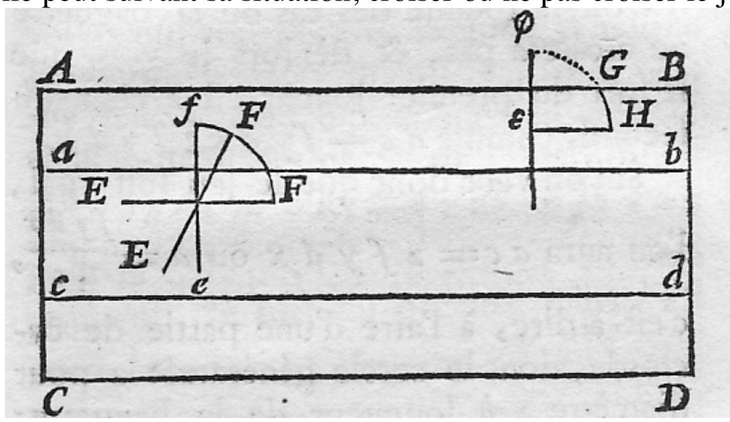
Je suppose que dans une chambre, dont le parquet est simplement divisé par des joints parallèles, on jette en l'air une baguette, & que l'un des joueurs parie que la baguette ne croisera aucune des parallèles du parquet, & que l'autre au contraire parie que la baguette croisera quelques-unes de ces parallèles ; on demande le sort de ces deux joueurs. *On peut jouer ce jeu sur un damier avec une aiguille a coudre ou une épingle sans tête.*

Pour le trouver, je tire d'abord entre les deux joints parallèles *AB* & *CD* du parquet, deux autres lignes parallèles *ab* & *cd*, éloignées des premières de la moitié de la longueur de la baguette *EF,*



& je vois évidemment que tant que le milieu de la baguette sera entre ces deux secondes parallèles, jamais elle ne pourra croiser les premières dans quelque situation *E F, e f,* qu'elle puisse se trouver ; &, comme tout ce qui peut arriver au-dessus de *a b* arrive de même au-dessous de *c d,* il ne s'agit que de déterminer l'un ou l'autre ; pour cela, je remarque que toutes les situations de la baguette peuvent être représentées par le quart de la circonférence du cercle, dont la longueur de la baguette est le diamètre ; appelant donc $2a$ la distance *C A* des joints du parquet, *C* le quart de la circonférence du cercle dont la longueur de la baguette est le diamètre, appelant $2b$ la longueur de la baguette, & f la longueur $A\,B$ des joints, j'aurai $f(a-b)$c pour l'expression qui représente la probabilité de ne pas croiser le joint du parquet, ou, ce qui est la même chose, pour l'expression de tous les cas où le milieu de la baguette tombe au-dessous de la ligne $a\,b$ & au-dessus de la ligne $c\,d$.

Mais lorsque le milieu de la baguette tombe hors de l'espace $a\ b\ c\ d$, compris entre les secondes parallèles, elle peut suivant sa situation, croiser ou ne pas croiser le joint ;



de sorte que le milieu de la baguette étant, par exemple, en ε, l'arc $\varphi\,G$ représentera toutes les situations où elle croisera le joint, & l'arc $G\,H$ toutes celles où elle ne le croisera pas, & comme il en fera de même de tous les points de la ligne $\varepsilon\ \varphi$, j'appelle dx les petites parties de cette ligne, & y les arcs de cercle $\varphi\,G$, & j'ai $f(\int y\,dx)$ pour l'expression de tous les cas où la baguette croisera, & $f(b\,c\ -\int y\,dx)$ pour celle des cas où elle ne croisera pas ; j'ajoute cette dernière expression à celle trouvée ci-dessus $f(a-b)c$, afin d'avoir la totalité des cas où la baguette ne croisera pas, & dès-lors je vois que le sort du premier joueur est à celui du second, comme
$a\,c - \int y\,dx : \int y\,dx$.

Si l'on veut donc que le jeu soit égal, l'on aura $a\,c = 2\int y\,dx$ ou $a = \frac{\int y\ \ dx}{\frac{1}{2}c}$, c'est-à-dire, à l'aire d'une partie de cycloïde, dont le cercle générateur a pour diamètre $2\,b$ longueur de la baguette ; or on sait que cette aire de cycloïde est égale au carré du rayon, donc $a = \frac{bb}{\frac{1}{2}c}$, c'est-à-dire, que la longueur de la baguette doit faire à-peu-près les trois quarts de la distance des joints du parquer.

La solution de ce premier cas, nous conduit aisément à celle d'un autre, qui d'abord auroit paru plus difficile, qui est de déterminer le sort de ces deux joueurs dans une chambre pavée de carreaux carrés ; car, en inscrivant dans l'un des carreaux carrés, un carré éloigné partout des côtés du carreau de la longueur b, l'on aura d'abord $c(a-b)^2$ pour l'expression d'une partie des cas où la baguette ne croisera pas le joint ; ensuite on trouvera $(2a-b)\int y\,dx$ pour celle de tous les cas où elle croisera, & enfin $cb(2a-b) - (2a-b)\int y\,dx$ pour le reste des cas où elle ne croisera pas ; ainsi, le sort du premier joueur est à celui du second, comme
$c(a-b)^2 + cb(2a-b) - (2a-b)\int y\,dx : (2a-b)\int y\,dx$.
Si l'on veut donc que le jeu soit égal, l'on aura $c(a-b)^2 + cb(2a-b) = (2a-b)^2\int y\,dx$ ou $\frac{\frac{1}{2}c\,a\,a}{2a-b} = \int y\,dx$; mais, comme nous l'avons vu ci-dessus, $\int y\,dx = b\,b$; ainsi, le côté du carreau doit être à la longueur de la baguette à-peu-près comme $\frac{41}{22} : 1$, c'est-à-dire pas tout-à-fait double. Si l'on j'ouoit donc sur un damier avec une aiguille dont la longueur seroit la moitié de

la longueur du côté des carrés du damier, il y auroit de l'avantage à parier que l'aiguille croisera les joints.

On trouvera, par un calcul semblable, que si l'on joue avec une pièce de monnoie carrée, la somme des sorts sera au sort du joueur qui parie pour le joint, comme *aac* : $4abb\sqrt{\frac{1}{2}} - b^3 - \frac{1}{2}Ab$; A marque ici l'excès de la superficie du cercle circonscrit au carré, & b la demi-diagonale de ce carré.

Ces exemples suffisent pour donner une idée des jeux que l'on peut imaginer sur les rapports de l'étendue ; l'on pourroit se proposer plusieurs autres questions de cette espèce, qui ne laisseroient pas d'être curieuses & même utiles : fi l'on demandoit, par exemple, combien l'on risque à passer une rivière sur une planche plus ou moins étroite ; quelle doit être la peur que l'on doit avoir de la foudre ou de la chûte d'une bombe, & nombre d'autres problèmes de conjecture, où l'on ne doit considérer que le rapport de l'étendue, & qui par conséquent appartiennent à la Géométrie tout autant qu'à l'Analyse.