

Modèles d'épidémie et mathématiques du lycée

Pierre Arnoux

6 novembre 2020
Commission Internationale des IREM

Chiffres et épidémies

Une épidémie, c'est (aussi) une masse de chiffres, de suites, de fonctions :

- ▶ Nombre de cas
- ▶ Nombre de victimes
- ▶ Variations, graphes
- ▶ Ordres de grandeur, logarithmes
- ▶ Suites, fonctions
- ▶ croissance, dérivée, exponentielle

Chiffres et épidémies

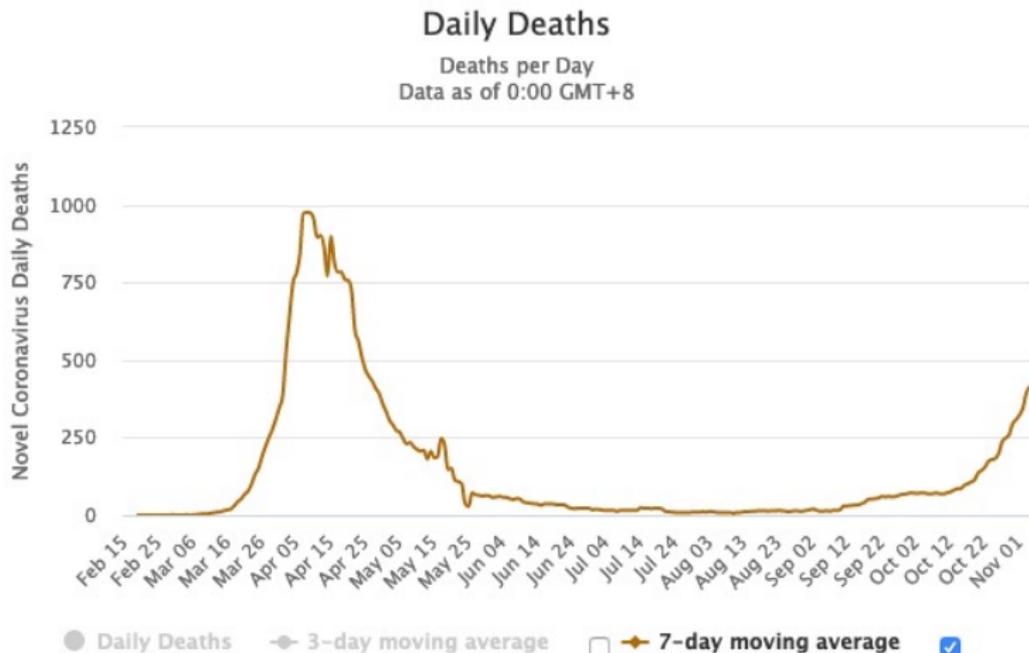
Comment étudier ces chiffres ?

Comment les comprendre ?

Comment les prévoir (au moins un peu) ?

Représentation graphique

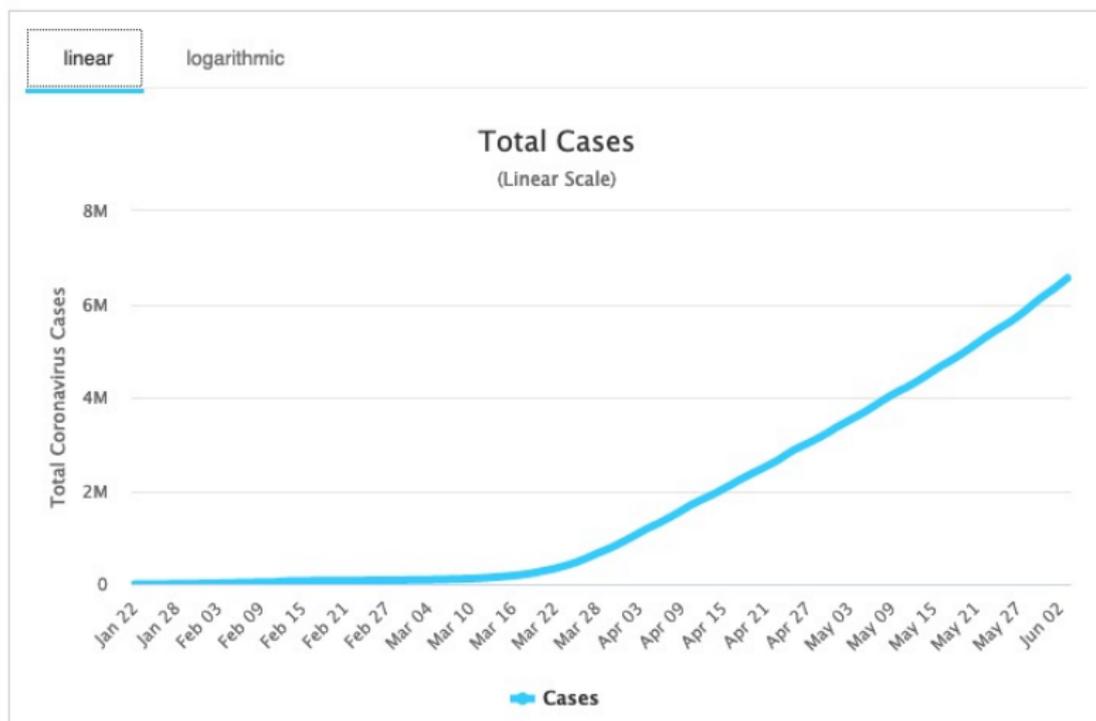
Daily New Deaths in France



Représentation graphique : linéaire et logarithmique

Total Cases (worldwide)

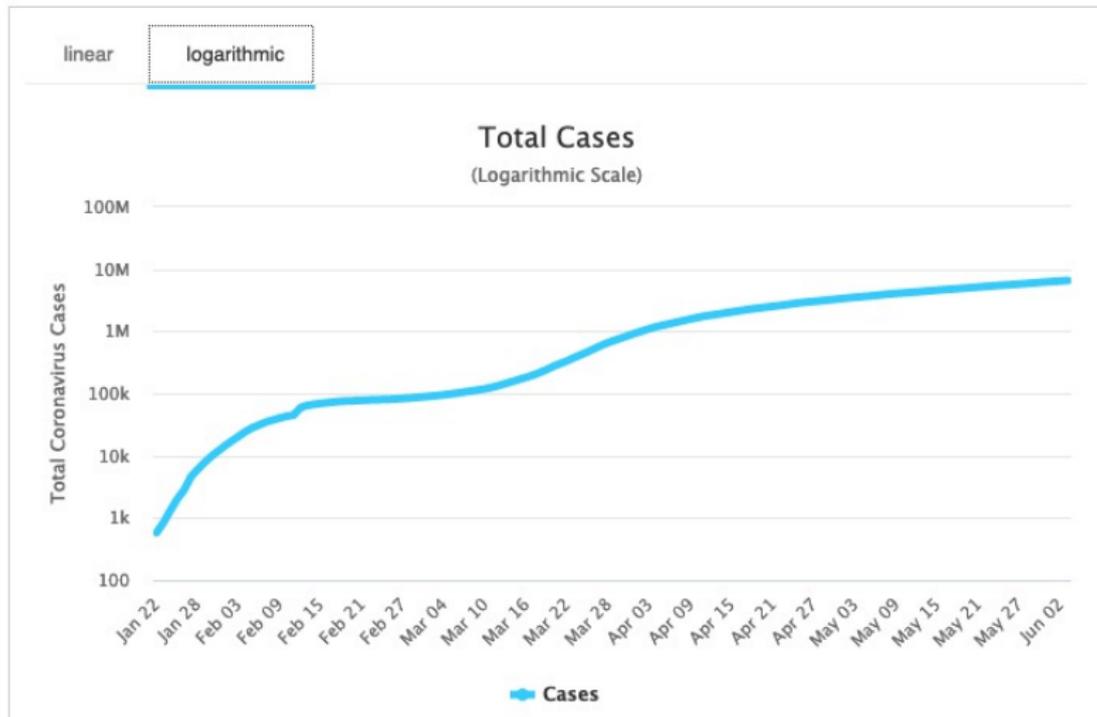
"Total Cases" = total cumulative count (6,688,922). This figure includes deaths and recovered or discharged patients (cases with an outcome).



Représentation graphique : linéaire et logarithmique

Total Cases (worldwide)

"Total Cases" = total cumulative count (6,688,922). This figure includes deaths and recovered or discharged patients (cases with an outcome).



Avertissement

- ▶ **Je ne suis pas épidémiologiste**
- ▶ but : pas faire un cours d'épidémiologie
- ▶ montrer des modèles
- ▶ et faire des mathématiques

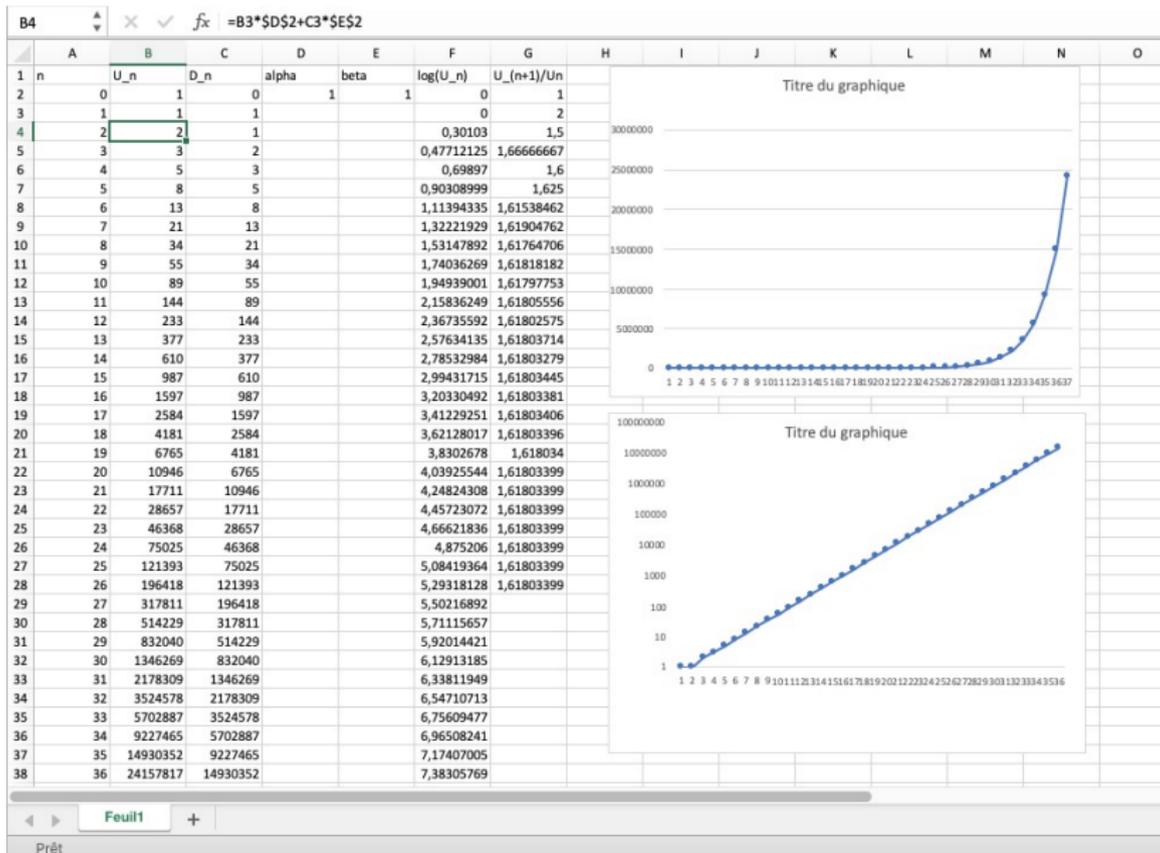
Avertissement

- ▶ On va montrer des modèles
- ▶ Ce sont des "histoires"
- ▶ ils ne sont pas réalistes
- ▶ mais permettent de comprendre certaines choses
- ▶ on ne montrera que des modèles "déterministes"
- ▶ tous les modèles sérieux sont probabilistes
- ▶ et il faudrait aussi en faire : à vous de travailler !
- ▶ Ces modèles ont tous des défauts, et il faut les montrer !
- ▶ *"all models are wrong; some of them are useful"*

Le plus simple : le modèle linéaire

- ▶ La maladie dure deux jours
- ▶ Chaque malade contamine α personnes le premier jour
- ▶ et β personnes le second
- ▶ U_n nombre de malades depuis 1 jour au jour n
- ▶ D_n nombre de malades depuis 2 jours au jour n
- ▶ Modèle linéaire : $D_{n+1} = U_n$ $U_{n+1} = \alpha U_n + \beta D_n$
- ▶ Condition d'épidémie ?.

Modèle linéaire : tableur



Le plus simple : prolongements

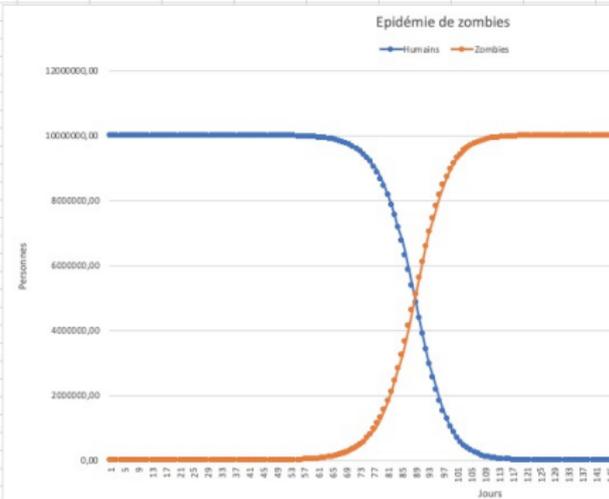
- ▶ On peut allonger la durée de contamination
- ▶ L'équation de récurrence est d'ordre supérieur à 2
- ▶ On a une matrice compagnon
- ▶ Plein de mathématiques...

Le plus joueur : Modèle des Zombies (ou modèle logistique)

- ▶ Les malades ne guérissent jamais
- ▶ Chaque jour, le nombre de nouveaux zombies est proportionnel :
- ▶ au nombre de zombies existants I_n
- ▶ au nombre de personnes saines restantes S_n
- ▶ $I_{n+1} = I_n + \alpha S_n I_n$
- ▶ $S_{n+1} = S_n - \alpha S_n I_n$
- ▶ attention si α est trop grand !

Modèle logistique : tableur

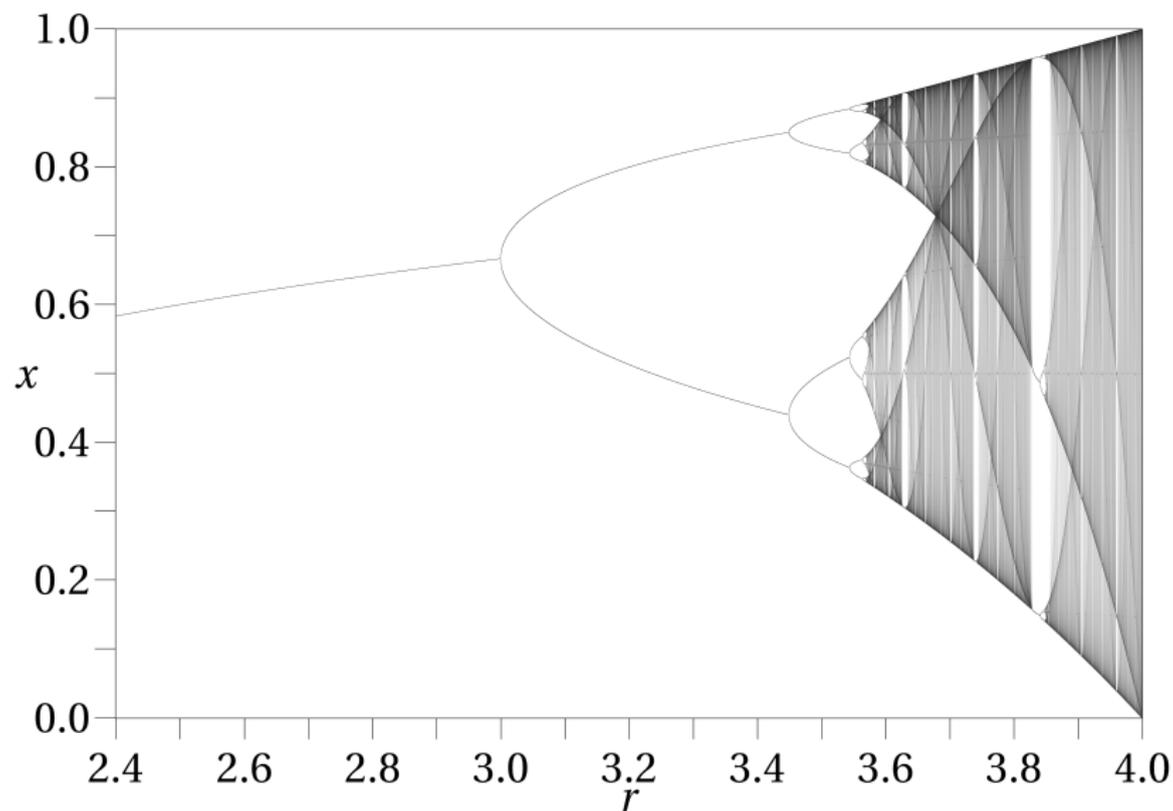
C4		=C3+\$E\$2*C3*B3/\$D\$2													
n	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
	S_n	I_n	N-population	alpha	L_(n+1)/L_n										
2	0	9999999,00	1,00	10000000	0,2	1,200									
3	1	9999998,80	1,20			1,200									
4	2	9999998,56	1,44			1,200									
5	3	9999998,27	1,73			1,200									
6	4	9999997,93	2,07			1,200									
7	5	9999997,51	2,49			1,200									
8	6	9999997,01	2,99			1,200									
9	7	9999996,42	3,58			1,200									
10	8	9999995,70	4,30			1,200									
11	9	9999994,84	5,16			1,200									
12	10	9999993,81	6,19			1,200									
13	11	9999992,57	7,43			1,200									
14	12	9999991,08	8,92			1,200									
15	13	9999989,30	10,70			1,200									
16	14	9999987,16	12,84			1,200									
17	15	9999984,59	15,41			1,200									
18	16	9999981,51	18,49			1,200									
19	17	9999977,81	22,19			1,200									
20	18	9999973,38	26,62			1,200									
21	19	9999968,05	31,95			1,200									
22	20	9999961,66	38,34			1,200									
23	21	9999954,00	46,00			1,200									
24	22	9999944,79	55,21			1,200									
25	23	9999933,75	66,25			1,200									
26	24	9999920,50	79,50			1,200									
27	25	9999904,60	95,40			1,200									
28	26	9999885,53	114,47			1,200									
29	27	9999862,63	137,37			1,200									
30	28	9999835,16	164,84			1,200									
31	29	9999802,19	197,81			1,200									
32	30	9999762,63	237,37			1,200									
33	31	9999715,16	284,84			1,200									
34	32	9999658,19	341,81			1,200									
35	33	9999589,83	410,17			1,200									
36	34	9999507,80	492,20			1,200									
37	35	9999409,36	590,64			1,200									
38	36	9999291,24	708,76			1,200									
39	37	9999149,50	850,50			1,200									
40	38	9998979,41	1020,59			1,200									
41	39	9998775,32	1224,68			1,200									
42	40	9998530,41	1469,59			1,200									
43	41	9998236,53	1763,47			1,200									
44	42	9997883,90	2116,10			1,200									
45	43	9997460,77	2539,23			1,200									
46	44	9996953,06	3046,94			1,200									
47	45	9996343,85	3656,15			1,200									
48	46	9995612,89	4387,11			1,200									
49	47	9994735,85	5264,15			1,200									
50	48	9993723,63	6325,23			1,200									



Modèle logistique : prolongement

- ▶ Il n'y a en réalité qu'une variable, car $S_n + I_n$ est constant
- ▶ On peut raisonner en pourcentage, de sorte que $S_n + I_n = 1$
- ▶ L'équation devient
- ▶ $I_{n+1} = I_n + \alpha I_n(1 - I_n)$
- ▶ On itère la fonction $f(x) = x(1 + \alpha - \alpha x)$
- ▶ c'est exactement la même fonction que pour la croissance logistique
- ▶ pousser α au-delà de 1 donne des phénomènes intéressants

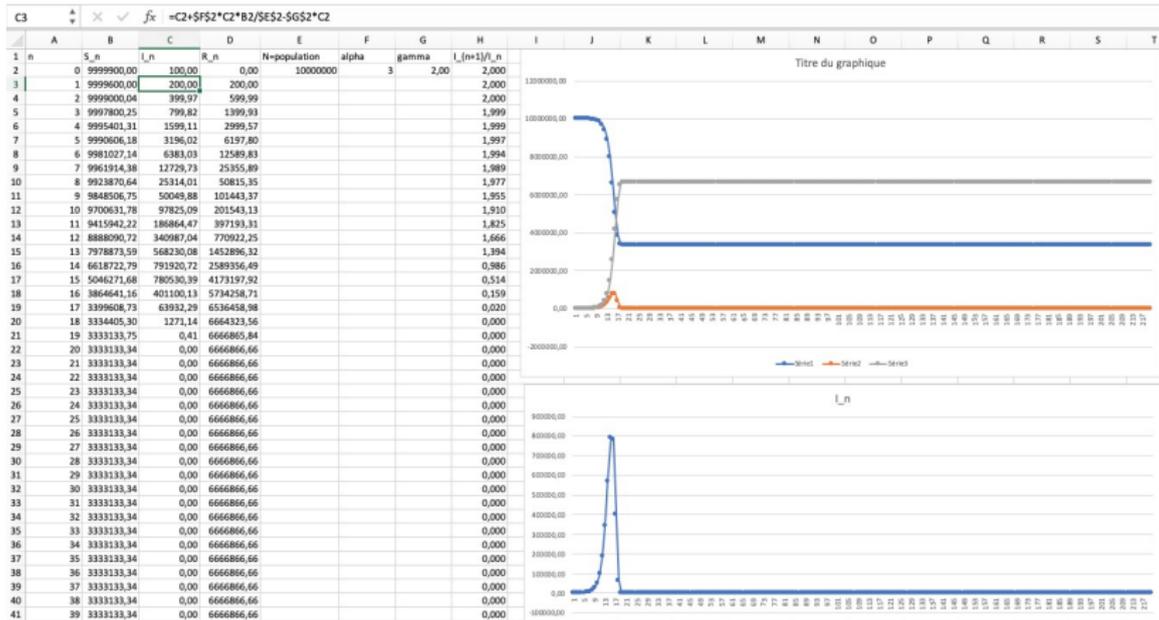
Modèle logistique : bifurcation



Modèle SIR

- ▶ trois *compartiments*
- ▶ Personnes Susceptibles S_n
- ▶ Personnes Infectées I_n (malades, guérissent chaque jour en proportion γ)
- ▶ Personnes "Retirées" R_n (mortes ou guéries et immunisées)
- ▶ $S_{n+1} = S_n - \alpha I_n S_n$
- ▶ $I_{n+1} = I_n + \alpha I_n S_n - \gamma I_n$
- ▶ $R_{n+1} = R_n + \gamma I_n$
- ▶ Pic épidémique, puis extinction

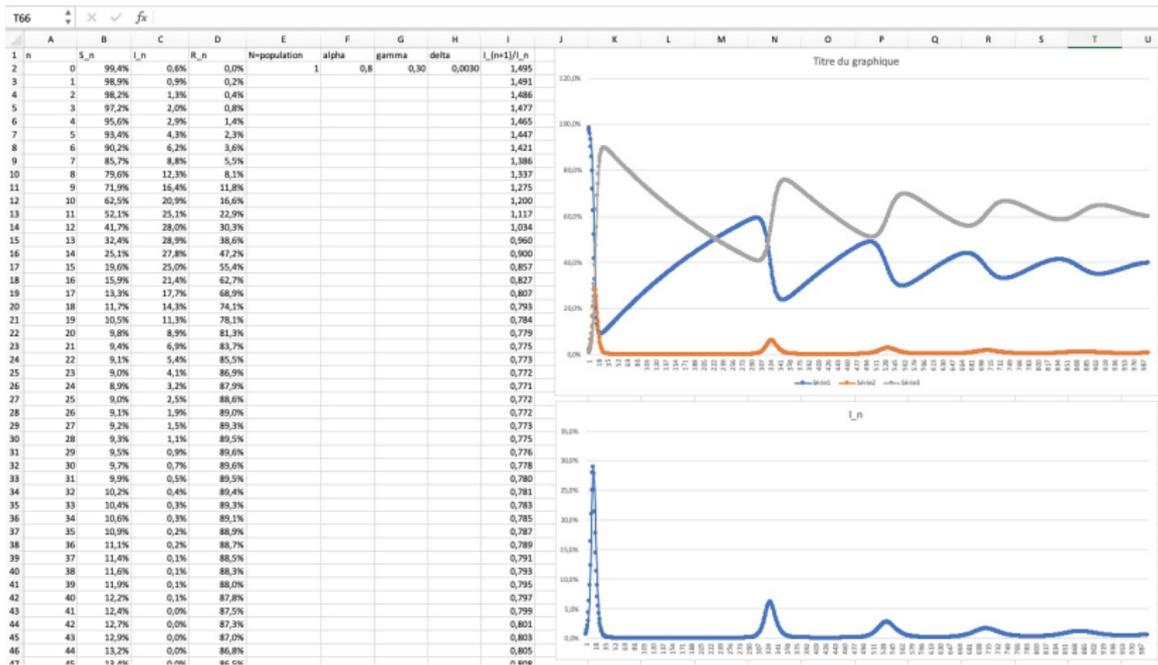
Modèle SIR : tableau



Modèle SIRS

- ▶ On ajoute la perte d'immunité avec un facteur δ
- ▶ $S_{n+1} = S_n - \alpha I_n S_n + \delta R_n$
- ▶ $I_{n+1} = I_n + \alpha I_n S_n - \gamma I_n$
- ▶ $R_{n+1} = R_n + \gamma I_n - \delta R_n$
- ▶ Il apparaît une deuxième vague
- ▶ Puis une situation endémique (que l'on peut calculer)

Modèle SIRS : tableur



Modèles différentiels

- ▶ Considérer des fonctions
- ▶ plutôt que des suites
- ▶ La variation se transforme en dérivée
- ▶ équations différentielles
- ▶ calculables numériquement sur Geogebra

Modèles probabilistes

- ▶ On doit pouvoir faire des modèles probabilistes élémentaires
- ▶ Chaque rencontre Infecté/susceptible donne une contamination avec probabilité p
- ▶ Peut-on le faire au niveau du lycée ou du collège ?
- ▶ On retrouverait les résultats des modèles SIR
- ▶ Avec des complications...

Dans la vraie vie

- ▶ bien plus compliqué!!!
- ▶ On ne connaît pas les paramètres
- ▶ Il y a plus de compartiments (âge, maladies, comportement social...)
- ▶ Les paramètres changent tout le temps (confinement, télé-travail...)
- ▶ Mais les modèles permettent de comprendre un peu certains facteurs.
- ▶ Attention ! on est encore au début de la première vague (moins de 10% de gens atteints).